UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA

Estudios con reconocimiento de validez por decreto presidencial del 3 de abril de 1981.

LA VERDAD NOS HARA LIBRES

"Relación entre diferentes enfoques algebraicos para la preservación de estabilidad en sistemas de control robusto lineales invariantes en el tiempo"

TESIS

Que para obtener el grado de

MAESTRO EN **CIENCIAS EN INGENIERÍA QUÍMICA**

Presenta:

MARIA CRISTINA MARQUINA ALMELA

Director del trabajo: Dr. Guillermo Fernández Anaya

Lectores: Dr. Vladimir L. Kharitonov

Dr. Juan Carlos Martínez García

México, D.F. 2006

UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA
CIUDAD DE MÉXICO

COORDINACIÓN DEL POSGRADO EN INGENIERÍA QUÍMICA
ACTA DE APROBACIÓN DE TRABAJO DE TITULACIÓN

9 de enero de 2006 .

Por medio de la presente se hace constar que se revisó y aprobó la tesis:

" Relación entre diferentes enfoques algebraicos para la preservación de estabilidad en sistemas de control robusto lineales invariantes en el tiempo "

que presenta el (la) alumno(a) **María Cristina Marquina Almela**

con número de cuenta 126329-9 , para obtener el título de Maestro en Ciencias en Ingeniería Química.

Institución en donde fue realizado Universidad Iberoamericana

Considerando que dicho trabajo reúne los requisitos necesarios para ser presentado en el examen profesional, se le han otorgado los votos aprobatorios por parte de la planta de sinodales asignada para tal efecto.

Director del Trabajo Dr. Guillermo Fernández Anaya

Lectores: Dr. Vladimir L. Kharitonov

Dr. Juan Carlos Martínez García

Atentamente
"LA VERDAD NOS HARA LIBRES"

DR. CIRO HUMBERTO ORTIZ ESTRADA
COORDINADOR DEL POSGRADO EN INGENIERÍA QUÍMICA

Índice General

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo de tesis concierne el estudio de sistemas lineales estacionarios. En particular el estudio se centra en ciertos aspectos relativos a la estabilidad de dicha clase de sistemas. Mas específicamente, en este estudio se analizan diferentes métodos algebraicos que fueron publicados por [[14],[6],[8]], para la preservación de estabilidad del sistema ante la presencia de incertidumbre en el modelo de éste. La incertidumbre considerada se expresa en el modelo por medio de transformaciones de la función de transferencia del sistema (producto Hadamard y secuencias multiplicativas fundamentalmente). Aunque los artículos de los cuales parte este estudio se centran esencialmente en control robusto, las contribuciones teóricas aquí presentadas se orientan a la estabilidad robusta, esto es, al estudio de la estabilidad de sistemas lineales estacionarios cuyos parámetros cambian.

El porque del estudio de la estabilidad se explica fácilmente: en general es necesario que los sistemas de control sean diseñados de tal forma que ciertas propiedades esenciales del sistema se mantengan aún ante la presencia de incertidumbre (y/o perturbaciones); la estabilidad de sistemas dinámicos, lineales o no, es una de las específicaciones fundamentales en diseño, análisis y evaluación de sistemas de control, por lo que garantizar su preservación es importante y se vuelve un tema de interés primordial para la investigación.

Los sistemas aquí tratados pertenecen a la clase de sistemas que solo poseen una entrada y una salida (usualmente denominados sistemas SISO en la literatura anglosajona). La estabilidad es una propiedad estructural del sistema y el concepto de estabilidad aquí tratado es el que corresponde a estabilidad asintótica (esto es, la propiedad de un sistema que se analiza con el conocido criterio de estabilidad de Hurwitz). Un sistema es estable si su respuesta natural (solución homogénea a la ecuación diferencial lineal) se aproxima a cero cuando el tiempo tiende a infinito, será marginalmente estable si su respuesta natural se mantiene constante u oscila al tender el tiempo a infinito y será inestable si su respuesta natural se dispara cuando el tiempo tiende a infinito. En términos algebraicos, al estar descrito el sistema por medio de una función de transferencia racional (cociente de dos polinomios reales expresados en términos del indeterminado de Laplace), la estabilidad depende de la ubicación en el plano complejo de las raíces del denominador de dicha función. Así, si todas las raíces están ubicadas en el semiplano complejo izquierdo abierto la respuesta natural del sistema decae exponencialmente, mientras que la existencia de raíces en el semiplano complejo derecho cerrado da lugar a comportamientos oscilatorios y/o exponencialmente crecientes en dicha respuesta natural, en cuyo caso se dice que el sistema es inestable (el comportamiento marginalmente estable se está considerando como inestable). En lo que sigue se denominará al semiplano complejo izquierdo abierto simplemente como semiplano complejo izquierdo.

Esta tesis esta organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se presenta la notación utilizada a lo largo del reporte así como algunas definiciones y resultados necesarios para el entendimiento correcto de lo presentado en los capítulos 3 y 4. En el capítulo 3 se presenta un resumen de lo reportado en los artículos estudiados y el análisis que se hizo de ellos. Lo reportado en el capítulo 4 es la parte central de este trabajo de tesis. En dicho capítulo se demuestra por el método de construcción como se obtiene una familia infinita de operadores lineales que mapean preservando la estabilidad de cualquier polinomio estable de grado fijo (se esta denominando polinomio estable, o de Hurwitz, a aquel cuyas raíces están ubicadas en el semiplano complejo izquierdo). También se presentan condiciones suficientes para la cerradura de funciones reales estrictamente positivas de grado relativo cero y se extiende el teorema de Talbot [11]. Además se muestra como las secuencias multiplicativas pueden representarse como una clase particular de transformaciones lineales. El capítulo 5 está dedicado a presentar ejemplos ilustrativos y se incluye una aplicación de lo aquí estudiado a un proceso de adsorción de una partícula. Mas específicamente se muestra que una aproximación lineal al modelo matemático de Fick [12] se describe por medio de una función real estrictamente positiva y se estudia la estabilidad robusta. El capítulo 6 presenta las conclusiones y las perspectivas de trabajo futuro. También se agrega un apéndice con ciertos conceptos básicos de teoría de control, con la finalidad de facilitar la lectura del manuscrito a lectores no expertos en la materia.

Capítulo 2

Preliminares Matemáticos y de Control

2.1 Introducción

Esta sección presenta notaciones, acrónimos, definiciones y resultados, que serán necesarios para la correcta exposición del trabajo aquí reportado. En particular se presentan definiciones básicas asociadas a transformaciones lineales (específicas a ciertos problemas de estabilidad de sistemas lineales aquí tratados), así como resultados básicos relacionados con funciones reales estrictamente positivas (no únicamente), que son necesarios como soporte técnico para alcanzar los resultados teóricos de este trabajo de tesis.

2.2 Notación

- $\mathbb{R}$ Campo de los números reales, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
- $\mathbb{R} - \{0\}$ Campo de los números reales excluyendo al cero.
- $\mathbb{Z}$ Números enteros.
- $\mathbb{Z}^+$ Números enteros positivos.
- $\mathbb{C}$ Campo de los números complejos (plano complejo).

- $\mathbb{C}^+$ Semiplano derecho abierto del plano complejo.

- $\mathbb{C}^-$ Semiplano izquierdo abierto del plano complejo.

- $\mathrm{Re}[z]$ Parte real $z \in \mathbb{C}$, $z = \sigma + j\omega$; $\mathrm{Re}[z] = \sigma$ $(\sigma, \omega \in \mathbb{R})$.

- j Unidad imaginaria $\sqrt{-1}$.

- s Variable compleja de Laplace.

- $\deg[A(s)] = n$ Grado del polinomio $A(s)$, con $n \in \mathbb{Z}^+$.

- $\mathbb{R}^n$ Espacio de los vectores reales de tamaño n.

- $\mathbb{R}^m$ Espacio de los vectores reales de tamaño m.

- $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ Matriz de $n \times m$ cuyas entradas son reales.

- $\phi \in \mathbb{R}^n$, $\psi \in \mathbb{R}^m$

- $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Función asociada a una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

- Considerando la función racional siguiente:

  $$p(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_n s^n + ... + a_0}{b_m s^m + ... + b_0}$$

  el grado relativo de $p(s)$ es el entero $\deg[B(s)] - \deg[A(s)] = m - n$, si $m - n \geq 0$, $p(s)$ es una función racional propia.

- $\min(m, n)$ significa el mínimo de los números m y n.

- S_{nm} Conjunto de mapeos generados por los operadores SPM.

- SS_{nm} Conjunto de mapeos generados por los operadores SSPM.

- $Z_c(P(x))$ Denota el número de ceros no-reales de $p(x)$, contando multiplicidades.

- $\mathbb{R}H^\infty$ Denota el dominio euclidiano de las funciones reales, racionales, propias y estables.

2.3 Acrónimos

- LTI Lineal Invariante en el tiempo.
- SISO Una entrada una salida.
- SPR Real estrictamente positivo.
- SPR0 Real estrictamente positivo de grado relativo cero.
- SPM Mapeos que preservan la estabilidad de al menos algún polinomio estable.
- SSPM Mapeos que preservan la estabilidad de todo polinomio estable.
- MIMO Multiples entradas multiples salidas.
- CZDS Secuencia decreciente de ceros complejos.

2.4 Definiciones Principales

Es conocida la importancia de evitar malos entendidos al tratar el significado de ciertos términos técnicos, en matemáticas se debe poner especial atención para evitar ambigüedades, por eso esta sección es medular. Además de que una vez definido un concepto, para probar algo con respecto a él, se debe usar la definición como parte de la demostración.

Las dos primeras definiciones se refieren a una clase especial de transformaciones lineales que mapean vectores de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y que se representan por medio de matrices reales constantes de dimensión $m \times n$. En lo que sigue se denotará λ_A a la representación matricial de la transformación lineal $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en la base canónica.

Definición 1 *(**SPM**) La matriz f_A se conoce como SPM ("mapeo que preserva la estabilidad" de acuerdo con [6]), si existe **algún** vector $\phi \in \mathbb{R}^n$ cuyos elementos corresponden a los coeficientes de un polinomio Hurwitz estable de grado n[1] que sea mapeado por f_A en un vector $\psi \in \mathbb{R}^m$ correspondiente a un polinomio Hurwitz estable (el mapeo está definido en términos de un producto vector-matriz, esto es, $\psi = f_A(\phi) = \phi A$).*

[1] *El polinomio $p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0$ se representa por medio del vector real $[a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0]$.*

Definición 2 *(**SSPM**) La matriz f_A se conoce como SSPM ("mapeo que preserva la estabilidad fuertemente" de acuerdo con [6]), si **todo** vector $\phi \in \mathbb{R}^n$ cuyos elementos corresponden a los coeficientes de un polinomio Hurwitz estable de grado n se mapea por f_A en un vector $\psi \in \mathbb{R}^m$ correspondiente a un polinomio Hurwitz estable (el mapeo está definido en términos de un producto vector-matriz, esto es, $\psi = f_A(\phi) = \phi A$).*

Muchas veces la descomposición de un polinomio real de grado n de la forma $p(s) = p_0 + p_1 s + ... + p_n s^n$ donde $p_i > 0$, para $i = 0, ..., n$. en sus partes par e impar de tal suerte que $p(s) = p^{par}(s) + p^{impar}(s)$, nos da ciertas ventajas algebraicas.

Definición 3 *(**Descomposición par e impar**) Las partes par e impar de un polinomio real $p(s)$ se definen como: $p^{par} := p_0 + p_2 s^2 + p_4 s^4 + ...$ y $p^{impar} := p_1 s + p_3 s^3 + p_5 s^5 + ...$*

Además:

Definición 4 *Las partes par e impar de un polinomio, evaluadas en $j\omega$, $p^e(\omega)$ and $p^o(\omega)$, son polinomios en ω^2, cuyas raíces serán siempre simétricas con respecto al origen del plano complejo al ser definidas de la siguiente manera:*

$$p^e(\omega) := p^{par}(j\omega) = p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 - ....$$

y

$$p^o(\omega) := \frac{p^{impar}(j\omega)}{j\omega} = p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 - ....,$$

ya que potencias pares generan este tipo de simetría.

Observación 1 *Es claro que la definición 3 esta implícita en la definición 4. Sin embargo se incluye porque de esta manera se obvian las condiciones necesarias y suficientes para que un polinomio sea Hurwitz mediante el teorema de Hermite-Biehler.*

La siguiente definición establece el concepto de polinomio Hurwitz, lo que nos provee de una forma práctica de determinar si un sistema lineal (invariante en el tiempo) es estable o no. Dado un polinomio, si los coeficientes líderes de sus partes par e impar tienen el mismo signo y sus raíces descansan sobre el eje imaginario alternadamente se cumple el criterio de Hurwitz. Esto es, las raíces del polinomio original estarán entonces en el semiplano complejo izquierdo.

Definición 5 *(**Polinomio Hurwitz**) Un polinomio de grado* n*, de la forma* $p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n$ *cuyos coeficientes son reales, es Hurwitz estable si todas las soluciones a la ecuación* $p(s) = 0$ *tienen parte real estrictamente negativa.*

Definición 6 *(**Producto Hadamard**) El producto Hadamard de dos polinomios de la forma* $p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_0$ *y* $q(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_0$*, en* $\mathbb{R}[s]$*, se define como:*

$$p \circ q = a_k b_k s^k + a_{k-1} b_{k-1} s^{k-1} + ... + a_0 b_0$$

donde $k = \min(n, m)$*.*

En la teoría de la distribución de las raíces de polinomios, se tiene una forma de caracterizar un tipo de transformación lineal que mapea polinomios en polinomios, por medio del uso de secuencias multiplicativas.

Definición 7 *(**Secuencia multiplicativa**) Una secuencia de números reales* $L = \{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ *se conoce como secuencia multiplicativa, si al utilizar un polinomio* $p(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k$ *real, cuyas raíces son todas reales, para formar el polinomio*

$$L[p(s)] := \sum_{k=0}^{n} \gamma_k a_k s^k$$

éste también tiene solamente raíces reales.

Definición 8 *(**CZDS**) Una secuencia* $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ *es una secuencia decreciente de ceros complejos (CZDS), si:*

$$Z_c(\sum_{k=0}^{n} \gamma_k a_k s^k) \leq Z_c(\sum_{k=0}^{n} a_k s^k)$$

para cualquier polinomio real $\sum_{k=0}^{n} a_k s^k$*.*

Observación 2 *Una secuencia de este tipo es también una secuencia multiplicativa.*

Se ha demostrado que las raíces de los polinomios de Bessel definidos de la siguiente manera son simples y caen en el semiplano complejo izquierdo abierto, por lo que los polinomios de Bessel $y_n(x), n \geq 1$ son polinomios estables.

Definición 9 ***(Polinomio de Bessel)*** *Un polinomio de Bessel de grado n se define de la siguiente manera:*

$$y_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!k!}(\frac{x}{2})^k,$$

donde x es el indeterminado.

Definición 10 ***(Dominios H)*** *El dominio H de una función $f(s)$, se define como el conjunto de puntos h en el plano complejo para los cuales la función $f(s) - h$ no tiene ceros en el semiplano complejo derecho.*

$$H = \{h \in \mathbb{C} : f(s) - h \neq 0, \mathrm{Re}\, s \geq 0\}$$

2.5 Resultados Básicos

El concepto de funciones de transferencia reales positivas ha tenido un papel central en la teoría de estabilidad. Este concepto nació en el contexto de teoría de circuitos y en síntesis de redes. Se puede visualizar de la siguiente manera: Sistemas que contienen funciones reales positivas (PR), conocidas también como funciones pasivas, son sistemas que no generan energía y sistemas que están modelados por funciones reales estrictamente positivas (SPR) son sistemas que disipan energía. También es sabida la importancia de este tipo de sistemas en diseño de esquemas adaptativos; como lo es el hecho de que una condición suficiente para la convergencia de algoritmos de modelos de referencia en control adaptativo es que la familia de funciones de transferencia en cuestión cumpla con la propiedad SPR.

En el siguiente teorema se presenta una caracterización de estabilidad para funciones de transferencia propias, estables y reales que satisfacen la propiedad SPR.

Teorema 11 *[1]**(Funciones SPR)*** *Siendo $p(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ una función racional. Entonces $p(s)$ será SPR (función real estrictamente positiva) si y sólo sí se satisfacen las tres condiciones siguientes :*

1. $Re[p(0)] > 0$,

2. $N(s)$ *es Hurwitz estable,*

3. $D(s) + j\alpha N(s)$ *es Hurwitz estable para toda* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

Observación 3 *Adicionalmente, si* $p(s)$ *es de grado relativo cero, entonces* $p(s)$ *es una función SPR0. Este resultado se puede extender para funciones reales estrictamente positivas de grado relativo uno (SPR1).*

Alan Talbot ha trabajado en la transformación de funciones positivas por medio de simultáneamente aplicar operadores lineales en numerador y denominador (ver [11]). Muchos de los resultados los prueba solamente para funciones racionales. En este trabajo, dichos resultados han sido de gran utilidad.

Teorema 12 *[11](**Teorema de Talbot**) El teorema de Talbot puede ser reescrito de la siguiente manera: si* A *es un operador lineal que mapea polinomios Hurwitz estables en polinomios Hurwitz estables y* $G = \frac{\phi}{\psi}$ *es una función real estrictamente positiva de grado relativo cero (SPR0), entonces* $G' = \frac{\phi A}{\psi A} \in$ *SPR0.*

En el estudio de la estabilidad de un sistema, muchas veces es necesario determinar el número de raíces en el semiplano complejo derecho de polinomios con coeficientes complejos, para lo cual se han determinado ciertas reglas. El siguiente teorema nos provee de un criterio de estabilidad para este tipo de casos.

Teorema 13 *[9](**Raíces de polinomios con coeficientes complejos**) Si se tiene un polinomio univariante* $f(s)$ *cuyos coeficientes son complejos que puede ser descompuesto de la siguiente manera:*

$$f(js) = (b_0 s^n + ... + b_n) + j\left(a_0 s^n + ... + a_n\right);$$

donde $b_0 s^n + ... + b_n$ *y* $a_0 s^n + ... + a_n$ *son polinomios reales; entonces* $f(s)$ *será estable si y sólo* *sí todos los menores de orden par de*

$$\triangle_{2p} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & ..... & a_{2p-1} \\ b_0 & b_1 & .... & b_{2p-1} \\ 0 & a_0 & .... & a_{2p-2} \\ 0 & b_0 & .... & b_{2p-2} \\ .... & .... & .... & .... \end{bmatrix},$$

donde $p = 1, 2, ..., n$*;* $a_k, = b_k = 0$ *para* $k > n$ *son positivos.*

El siguiente teorema resalta la importancia que se tiene, en análisis de estabilidad, de encontrar operadores lineales no clásicos que preservan esta propiedad (estabilidad) en sistemas lineales. En este caso el operador se representa por medio de una secuencia multiplicativa tal y como fue definida precedentemente.

Teorema 14 *[2](**Preservación de estabilidad por medio de Secuencias multiplicativas**) Siendo* $L = \{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ *una secuencia multiplicativa no negativa. Entonces* $L[p(s)]$ *será un polinomio estable toda vez que* $p(s)$ *sea un polinomio estable.*

Observación 4 *Recuerde que* $L[p(s)]$ *no se refiere a la substitución de* $p(s)$ *en una función* L*, sino que está representando el polinomio que resulta de la multiplicación término a término de la secuencia multiplicativa. Es importante notar que el resultado precedente aplica a polinomios cuyas raíces no son necesariamente todas reales.*

Otro resultado similar, pero establecido en términos de secuencias decrecientes de ceros complejos, es el siguiente:

Teorema 15 *[3] Siendo* $h(s)$ *un polinomio real. La secuencia* $L = \{h(k)\}_{k=0}^{\infty}$ *será una secuencia decreciente de ceros complejos (CZDS) si y sólo sí:*

1. $h(0) \neq 0$ *y todos las raíces de* h *son reales y negativos, o*

2. $h(0) = 0$ *y el polinomio* $h(s)$ *es de la forma* $h(s) = s(s-1)(s-2)....(s-m+1)\Pi_{i=1}^{p}(s-b_i)$ *donde* $b_i < m$ *para cada* $i = 1, ..., p$.

La teoría de control robusto, de sistemas lineales sometidos a incertidumbre real paramétrica, tomó otro matiz con el planteamiento del siguiente sorprendente teorema publicado por V. L. Kharitonov en 1978 ([13]). Este teorema establece que *la estabilidad Hurwitz de una familia de polinomios a intervalos, reales o complejos, puede ser garantizada por la estabilidad Hurwitz de cuatro (u ocho) polinomios críticos en esa familia.*

Teorema 16 *[13](**Teorema de Kharitonov**) Considerando el conjunto $I(s)$ de polinomios reales de grado n de la forma:*

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + ... + \delta_n s^n.$$

Donde los coeficientes varían dentro de los siguientes rangos:

$$\delta_0 \in [x_0, y_0], \delta_1 \in [x_1, y_1], ..., \delta_n \in [x_n, y_n].$$

Definiendo: $\underline{\delta} := [\delta_0, \delta_1, ..., \delta_n]$, *se identifica un polinomio $\delta(s)$ con su correspondiente vector de coeficientes $\underline{\delta}$. Teniendo el hiperrectangulo de coeficientes*

$$\triangle := \{\underline{\delta} : \underline{\delta} \in \mathbb{R}^{n+1}, x_i \leq \delta_i \leq y_i, i = 0, 1, ..., n\}.$$

Se asume que el grado permanece invariante para toda la familia de polinomios, es decir, $0 \notin [x_n, y_n]$. A este conjunto de polinomios se le conoce como una familia de polinomios reales a intervalos $I(s)$.

Cada polinomio en la familia $I(s)$ es Hurwitz si y sólo sí los cuatro siguientes polinomios (conocidos como polinomios de Kharitonov) son Hurwitz:

$$\begin{aligned}
K^1(s) &= x_0 + x_1 s + y_2 s^2 + y_3 s^3 + x_4 s^4 + x_5 s^5 + y_6 s^6 + \cdots \\
K^2(s) &= x_0 + y_1 s + y_2 s^2 + x_3 s^3 + x_4 s^4 + y_5 s^5 + y_6 s^6 + \cdots \\
K^3(s) &= y_0 + x_1 s + x_2 s^2 + y_3 s^3 + y_4 s^4 + x_5 s^5 + x_6 s^6 + \cdots \\
K^4(s) &= y_0 + y_1 s + x_2 s^2 + x_3 s^3 + y_4 s^4 + y_5 s^5 + x_6 s^6 + \cdots
\end{aligned}$$

El siguiente teorema es muy utilizado cuando se trata estabilización paramétrica robusta, a partir de él se han derivado varios resultados. Se conoce como principio de exclusión del cero.

Teorema 17 *[1](**Principio de exclusión del cero**) Considerando que la siguiente familia de polinomios es de grado constante (cuyos coeficientes dependen continuamente de un vector de parámetros* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l$*, el cual varia en el conjunto* $\Omega \in \mathbb{R}^l$*) que contiene al menos un polinomio estable y* Ω *es un conjunto conectado por trayectorias*

$$\Delta(s) := \{\delta(s, \mathbf{p}) : \mathbf{p} \in \mathbf{\Omega}\}.$$

Entonces toda la familia será estable si y sólo sí:

$$0 \notin \triangle(i\omega), \forall\omega \in \mathbb{R}$$

El siguiente teorema es utilizado en el estudio de la estabilidad robusta de familias de polinomios politópicos con respecto a una región de estabilidad arbitraria. Estos casos se presentan en sistemas de control en los que los coeficientes del polinomio característico del sistema son funciones lineales de ciertos parámetros de incertidumbre, los cuales varían a su vez en intervalos. Los parámetros pueden ser parámetros físicos pertenecientes a la planta o parámetros que pertenecen al diseño del controlador.

El teorema de las aristas muestra que el espacio de las raíces de la familia completa se puede obtener del conjunto de las raíces de las aristas expuestas.

Definiendo:

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + ... + \delta_n s^n$$

como un típico elemento de una familia de polinomios reales de grado n. P_n como el espacio vectorial de polinomios reales de grado menor o igual a n en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Se identifica un polinomio $\delta(s)$ con su correspondiente vector de coeficientes $\underline{\delta}$ por medio de:

$$\underline{\delta} := [\delta_0, \delta_1, ..., \delta_n]^T$$

$\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ como un politopo de dimensión m , esto es, el casco convexo de un número finito de puntos. Como politopo, Ω es un conjunto compacto. *Se hará la suposición que todos los polinomios en* Ω *tienen el mismo grado.*

Suposición 1. El signo de δ_n es constante en Ω, ya sea siempre positivo ó siempre negativo. Suponiendo por ejemplo que el signo siempre es positivo, y asumiendo que Ω es un conjunto compacto, siempre será posible encontrar un $\Delta > 0$ de tal suerte que: $\delta_n > \Delta$, para todo $\underline{\delta} \in \Omega$.

Un hiperplano de soporte H es un conjunto afín de dimensión n tal que $\Omega \cap H \neq 0$, y tal que cada punto en Ω cae en un solo lado de H. Los conjuntos expuestos de Ω son aquellos conjuntos convexos $\Omega \cap H$ donde H es un hiperplano de soporte. Los conjuntos expuestos unidimensionales se conocen como aristas expuestas, mientras que los conjuntos expuestos bidimensionales se conocen como caras expuestas.

Considerando que $W \subset \Omega$. Entonces $R(W)$ será el espacio de las raíces de W si,

$$R(W) = \{s : \delta(s) = 0, \text{ para algún} \underline{\delta} \in W\}.$$

∂S denota la frontera de cualquier conjunto en el plano complejo.

Se tiene entonces:

Teorema 18 *[1](**Teorema de las aristas**) Siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un politopo de polinomios que satisface la suposición 1. Entonces la frontera de $R(\Omega)$ está contenida en el espacio de las raíces de las aristas expuestas de Ω.*

Capítulo 3

Antecedentes específicos

3.1 Introducción

En este capítulo se presenta un breve sumario del contenido de los 3 artículos en los que se fundamenta la investigación aquí reportada, haciendo hincapié en sus interrelaciones, de manera que se especifiquen las circunstancias bajo las que los diversos métodos se aplican. Dichos artículos son los siguientes:

- Stability preserving maps and robust design ([6]) .
- Stability and robust stability of uniform systems ([14]).
- Preservation of SPR functions and stabilization by substitutions in SISO plants ([8]).

En ([6]) se presenta el concepto de mapeos matriciales[1] que preservan la estabilidad del sistema, así como el impacto que esto tiene en el diseño de estrategias de control robusto. Se desarrolla una serie de pruebas para verificar si una determinada matriz mapea preservando la estabilidad, ya que de esta manera el concepto de SPM muestra con claridad su verdadera utilidad. Se demuestra que este concepto se puede utilizar para proveer una diferente caracterización de la existencia de un controlador de orden fijo, para la estabilización simultanea de un número finito de plantas, técnica que se compara favorablemente con los procedimientos

[1]Por mapeos matriciales se entiende la representación por medio de matrices de ciertas transformaciones lineales.

de síntesis presentados por Doyle en ([15]). Así mismo se demuestra que por medio de este concepto se establecen las condiciones para la estabilización robusta de una familia de plantas con incertidumbre real paramétrica. Por ultimo se demuestra como los métodos que verifican las propiedades de preservación de estabilidad (de los sistemas sometidos a la acción de los mapeos) llevan a técnicas de estabilización robusta y muestra como se aplica la metodología tratada a algunos ejemplos.

En ([8]) se presentan condiciones suficientes para preservar la estabilidad por medio de substituciones de funciones racionales. Se prueba que mediante la substitución de funciones SPR, de grado relativo cero, es posible preservar no solo la estabilidad sino también la factorización coprima de las funciones de transferencia. También se prueba la cerradura bajo composición de funciones de este tipo. Finalmente se presentan algunos resultados sobre: estabilización robusta utilizando compensadores constantes; funciones robustas SPR y estabilidad robusta con base en la cerradura de funciones SPR.

En lo que respecta a lo publicado en ([14]), se establece que la función característica de un sistema uniforme, es decir, un sistema que está compuesto de componentes y amplificadores idénticos, es de la forma $D(f(s))$, donde $D(p)$ es un polinomio y $f(s)$ es la función de transferencia de los componentes. Su criterio de estabilidad presenta condiciones necesarias y suficientes y se expresa como $p_i \in H$, $i = 1, ..., n$ donde p_i son los ceros del polinomio $D(p)$ y el dominio H depende de la función $f(s)$. También se establece una condición general para estabilidad robusta para el caso en que el polinomio $D(p)$ y la función $f(s)$ cuentan con incertidumbre, generalizando el principio de exclusión del cero. Con base en la generalización de este principio se generalizan el teorema de Kharitonov, el de las aristas y el de estabilidad robusta bajo incertidumbre H^{∞} y retardos arbitrarios.

3.2 Relaciones principales

En lo que sigue se presentan las relaciones principales que existen entre los tres artículos, para lo cual primero se listan en cada caso los resultados técnicos (sin demostraciones) guardando la identificación particular que los resultados tienen en sus artículos correspondientes.

3.2.1 B. Polyak

Criterio de estabilidad

Lema 1.- Siendo $f(s)$ una función racional del tipo $f(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$, donde $A(s)$ y $B(s)$ son polinomios, grado $A(s) = k$ y grado $B(s) = m$, $B(j\omega) \neq 0, \omega \in \mathbb{R}$, y l el número de ceros en el semiplano complejo derecho de $B(s)$. Entonces, el dominio H es el dominio Q_i que es encirculado N veces por la curva $z = f(j\omega)$. Para N se tiene:

a) $N = l$ si $f(s)$ es una función racional propia ($k \leq m$).

b) $N = (k-m)/2 + l$ si $f(s)$ es una función racional impropia ($k > m$).

Teorema 1.- La función característica $G(s) = D(f(s))$ es estable si y sólo sí los ceros del polinomio $D(p)$ todos caen dentro del dominio H de la función $f(s)$.

Corolario 1.- Siendo $f(s)$ una función racional del tipo $f(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$, donde $A(s)$ y $B(s)$ son polinomios, grado $A(s) = k$ y grado $B(s) = m$, $B(j\omega) \neq 0, \omega \in \mathbb{R}$, y l el número de ceros en el semiplano complejo derecho de $B(s)$. Entonces, para que la función característica $G(s) = D(f(s))$ sea estable, es necesario y suficiente que la gráfica de $f(j\omega), -\infty < \omega < +\infty$, encircule N veces cada uno de los ceros del polinomio característico. Para N se tiene:

a) $N = l$ si $f(s)$ es una función racional propia ($k \leq m$).

b) $N = (k-m)/2 + l$ si $f(s)$ es una función racional impropia ($k > m$).

Este criterio de estabilidad puede ser aplicado a ciertas clases de problemas, veamos:

a) Criterio de Nyquist. Si se tiene un sistema retroalimentado que consiste de un solo elemento $f(s)$. Entonces, como sabemos el denominador de la función de transferencia es $1 + f(s)$. Esta expresión se puede ver como $D(f(s))$ donde $D(p) = 1 + p$. El cero es $p_1 = -1$. Aplicando el inciso a) del corolario a la función racional $f(s)$, se encuentra que $f(j\omega)$ debe encircular l veces el punto -1, esto es el clásico criterio de Nyquist. Es importante notar que el criterio generalizado de Nyquist para funciones $f(s)$ no propias se deriva del inciso b) del corolario.

b) Componentes estables. Siendo $f(s)$ una función racional propia que no tiene ceros en el semiplano complejo derecho, el inciso a) del corolario indica que para que la función característica $D(f(s))$ sea estable es necesario y suficiente que la función de transferencia $f(j\omega)$ no encircule ninguno de los ceros del polinomio $D(p)$.

Observación 5 *Cabe mencionar que en este artículo se presenta el caso para sistemas MIMO, que no concierne a lo aquí tratado.*

3.2.2 T. Djaferis

Mapeos matriciales que preservan estabilidad y estabilización simultanea

Definición 1.- Una función f_A es un mapeo matricial que preserva la estabilidad (SPM), si existe **algún** n-vector ϕ estable que sea mapeado a un m-vector $\psi = f_A(\phi) = \phi A$ también estable.

Definición 2.- Una función f_A se conoce como mapeo matricial que preserva la estabilidad fuertemente (SSPM), si **todo** n- vector estable ϕ es mapeado a otro vector estable $\psi = f_A(\phi) = \phi A$ de tamaño m .

A fin de facilitar la comprensión del planteamiento de Djaferis, en cuanto a la importancia de los mapeos matriciales que preservan la estabilidad en el contexto de estabilización simultanea, se expondrá toda la demostración por construcción que él hace en el artículo, para que los teoremas 1 y 2 queden claros en forma satisfactoria.

Considerando un sistema retroalimentado, donde $p_i(s), i \in \{1, 2, ..., N\}$ es una de un número infinito de plantas SISO estrictamente propias de grado $\tilde{n}$, dadas por:

$$p_i(s) = \frac{n_{pi}(s)}{d_{pi}(s)}$$

donde $n_{pi}(s) = n_{i\tilde{n}-1}s^{\tilde{n}-1} + n_{i\tilde{n}-2}s^{\tilde{n}-2} + ... + n_{i0}$ y $d_{pi}(s) = s^{\tilde{n}} + d_{i\tilde{n}-1}s^{\tilde{n}-1} + ... + d_{i0}$ son coprimos para todos los valores de i. El controlador dado por

$$C(s) = n_c(s)/d_c(s)$$

es propio y de orden $\tilde{n} - 1$ donde $n_c(s) = y_{\tilde{n}-1}s^{\tilde{n}-1} + y_{\tilde{n}-2}s^{\tilde{n}-2} + ... + y_0$ y $d_c(s) = s^{\tilde{n}-1} + x_{\tilde{n}-2}s^{\tilde{n}-2} + ... + x_0$.

Los polinomios característicos a lazo cerrado son de grado $2\tilde{n} - 1$ y dados por:

$$\begin{aligned} \phi_i(s) &= d_c(s)d_{pi}(s) + n_c n_{pi}(s) \\ \phi_i(s) &= s^{2\tilde{n}-1} + \phi_{i2\tilde{n}-2}s^{2\tilde{n}-2} + \phi_{i2\tilde{n}-3}s^{2\tilde{n}-3} + ... + \phi_{i0}. \end{aligned}$$

Al hablar de estabilización simultanea es deseable saber si existe un solo controlador que haga que los polinomios $\phi_i(s)$ sean estables para toda i . Esta relación se puede expresar en el espacio vectorial de coeficientes en términos de la matriz resultante de Sylvester.

Formando primero el vector de coeficientes del controlador:

$$x = [1 y_{\tilde{n}-1} x_{\tilde{n}-2} y_{\tilde{n}-2} x_{\tilde{n}-3} ... x_0 y_0].$$

La familia de resultantes de Sylvester de $\tilde{n}-$ésimo orden son matrices de $2\tilde{n} \times 2\tilde{n}$ dadas por:

$$\begin{bmatrix} 1 & d_{i\tilde{n}-1} & d_{i\tilde{n}-2} & \cdots & d_{i0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n_{i\tilde{n}-1} & n_{i\tilde{n}-2} & \cdots & n_{i0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & d_{i\tilde{n}-1} & \cdots & d_{i1} & d_{i0} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n_{i\tilde{n}-1} & \cdots & n_{i1} & n_{i0} & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & d_{i\tilde{n}-1} & d_{i\tilde{n}-2} & \cdots & d_{i0} \\ 0 & 0 & & 0 & n_{i\tilde{n}-1} & n_{i\tilde{n}-2} & \cdots & n_{i0} \end{bmatrix} = S_{\tilde{n}}(d_{pi}(s), n_{pi}(s)).$$

Una vez definido esto, la familia de polinomios característicos se puede reescribir de la siguiente manera:

$$xS_{\tilde{n}}(d_{pi}(s), n_{pi}(s)) = \phi_i, i \in \{1, 2, ..., N\}$$

Para ejemplificar: suponiendo que $N = 2$ y que existe un controlador $C(s)$ (representado por x) que hace que $\phi_1(s)$ y $\phi_2(s)$ sean estables. Entonces esto implica que:

$$\begin{aligned} xS_{\tilde{n}}(d_{p1}(s), n_{p1}(s)) &= \phi_1 \\ xS_{\tilde{n}}(d_{p2}(s), n_{p2}(s)) &= \phi_2 \end{aligned}$$

como las resultantes de Sylvester son invertibles, entonces:

$$\phi_1 S_{\tilde{n}}(d_{p1}(s), n_{p1}(s))^{-1} S_{\tilde{n}}(d_{p2}(s), n_{p2}(s)) = \phi_2.$$

Definiendo $A = S_{\tilde{n}}(d_{p1}(s), n_{p1}(s))^{-1} S_{\tilde{n}}(d_{p2}(s), n_{p2}(s))$. Si esta matriz mapea preservando la estabilidad de las dos plantas, entonces las dos plantas son simultáneamente estabilizables.

Teorema 1.- Dos plantas estrictamente propias de grado n, $p_1(s) = \frac{n_{p1}(s)}{d_{p1}(s)}$ y $p_2(s) = \frac{n_{p2}(s)}{d_{p2}(s)}$ pueden ser estabilizadas simultáneamente por medio de un controlador propio de grado $n-1$, si y sólo sí f_A, $A = S_n(d_{p1}(s), n_{p1}(s))^{-1} S_n(d_{p2}(s), n_{p2}(s))$ es un mapeo matricial que preserva la estabilidad.

Teorema 2.- N plantas estrictamente propias de grado n, $p_i(s) = \frac{n_{pi}(s)}{d_{pi}(s)}$, $i \in \{1, 2, ..., N\}$ pueden ser estabilizadas simultáneamente por medio de un controlador propio de grado $n-1$, si y sólo sí f_{Ai}, $A_i = S_n(d_{p1}(s), n_{p1}(s))^{-1} S_n(d_{pi}(s), n_{pi}(s))$, $i \in \{1, 2, ..., N\}$ es una familia de mapeos matriciales preservadores de la estabilidad.

A continuación se citarán las pruebas que desarrolla el autor para verificar si una determinada representación matricial de una transformación lineal es una SPM, así como ciertas propiedades de los operadores SPM y SSPM.

Lema 1

Siendo A y B matrices cuadradas de $n \times n$ cuyas f_A y f_B son SSPM's. Entonces los productos matriciales AB y BA generan f_{AB} y f_{BA} respectivamente que a su vez son SSPM's.

Esto implica por supuesto que S_{nn} sea cerrado bajo composición de funciones.

Lema 2

Siendo A una matriz invertible de $n \times n$ cuya f_A es SPM. Entonces $f_{A^{-1}}$ es SPM.

Lema 3

Siendo A una matriz de $n \times m$ cuya f_A es SPM ó SSPM. Entonces f_{-A} es también SPM ó SSPM.

Lema 4

Siendo A una matriz de $n \times n$ triangular inferior cuyas entradas en la diagonal principal son positivas. La correspondiente f_A es SPM.

Lema 5

Siendo A una matriz de $n \times n$ triangular superior con unos en la diagonal principal. La correspondiente f_A es SPM.

Polinomios que pueden ser mapeados por medio de esta matriz son de la forma: $\phi(s) = (s+q)^{\check{n}}$, donde $\check{n} = n-1$ y q es una constante positiva "grande".

Lema 6

Siendo A una matriz de $n \times n$ que tenga algún renglón que sea un polinomio estable de grado $n-1$. La correspondiente f_A es SPM.

En este caso los polinomios estables que pueden ser mapeados por medio de f_A a otros polinomios estables pueden ser de la forma: $\phi(s) = (s+q)^{i-1}(s+\frac{1}{q})^{n-i}$, donde q es positiva, real y “grande”($i \in \{1, ..., n\}$).

Lema 7

Siendo A una matriz de $n \times n$ con dos renglones consecutivos cuya suma es un polinomio estable de grado $n-1$. La correspondiente f_A es SPM.

En este lema se consideran dos casos:

a) Los dos renglones en cuestión son los dos primeros renglones de la matriz.

b) Los dos renglones en cuestión son cualesquiera dos renglones consecutivos de la matriz.

Para el caso a) el tipo de polinomios estables que pueden ser mapeados por medio de f_A a otros polinomios estables son de la forma: $\phi(s) = (s+\frac{1}{q})^{n-3}(qs^2+qs+1)$, donde q es positiva, real y “grande”.

Para el caso b) el tipo de polinomios estables que pueden ser mapeados por medio de f_A a otros polinomios estables son de la forma: $\phi(s) = (s+q)^{j-1}(s+\frac{1}{q})^{n-2-j}(s^2+qs+q)$, donde q es positiva, real y “grande” y $1 \leq j \leq n-2$, $i = j+2$.

Lema 8

Siendo A una matriz de $n \times n$ con k renglones consecutivos que forman una submatriz A_1 de $k \times n$, la cual genera f_{A_1} que es SPM. Entonces f_A es SPM.

En este lema se consideran dos casos:

a) La submatriz A_1 se forma con los primeros k renglones de la matriz.

b) La submatriz se forma con cualesquiera k renglones consecutivos.

Para el caso a) el tipo de polinomios estables que pueden ser mapeados por medio de f_A a otros polinomios estables son de la forma: $\phi(s) = (s+\frac{1}{q})^{n-k-1}(qs\alpha(s)+1)$, donde q es positiva, real y “grande”.

Para el caso b) el tipo de polinomios estables que pueden ser mapeados por medio de f_A a otros polinomios estables son de la forma: $\phi(s) = (s+q)^{j-1}(s+\frac{1}{q})^{n-k-j}(s^k+q\alpha(s))$ donde q es positiva, real y “grande” y $k-1 \leq j \leq n-2$, $i = j+2$.

Lema 9

Siendo A una matriz de $n \times n$ en la que la suma de los renglones $i-2$ e i, donde $3 \leq i \leq n$, es un polinomio estable de grado $n-1$. La correspondiente f_A es SPM.

El tipo de polinomios estables que pueden ser mapeados por medio de f_A a otros polinomios también estables son de la forma: $\phi(s) = (s+q)^{j-1}(s+\frac{1}{q})^{n-2-j}(qs^2+s+q)$ donde q es positiva, real y "grande" y $1 \leq j \leq n-2$, $i = j+2$.

Lema 10

Siendo A una matriz de $n \times n$. Cuando la submatriz A_1 formada por todos los renglones pares (o impares) de la matriz A, es SPM y además mapea un polinomio estable con raíces reales distintas a un polinomio estable. La correspondiente f_A es SPM.

Una consecuencia inmediata de este lema es que la resultante de Sylvester de cualquier orden de una planta de orden $\check{n}$, propia (no estrictamente propia), que es de fase minima es SPM.

En este caso los polinomios estables que pueden ser mapeados por medio de f_A a otros polinomios estables son de la forma: $\phi(s) = qh(s^2) + sg(s^2)$ que será estable para toda q positiva.

3.2.3 G. Fernández

Preservación y cerradura

Teorema 1.- Si $p(s) \in RH^\infty$ y siendo $q(s)$ cualquier función SPR0, entonces $p(q(s)) \in RH^\infty$.

Teorema 2.- La composición de funciones SPR0 es una función SPR0.

Lema 3.- Siendo $(N_p(s), D_p(s))$ la factorización coprima de $p(s) \in R_p(s)$, entonces $(N_p(q(s)), D_p(q(s)))$ es una factorización coprima de $p(q(s)) \in R_p(s)$, para cualquier función SPR0 $q(s)$.

3.2.4 Análisis

En los artículos estudiados es claro que Djaferis y Fernández presentan formas de preservar la estabilidad del sistema y Polyak establece un criterio de estabilidad. Fernández presenta además una forma de preservar la factorización coprima; para tener claridad en esta sección se establecerán primero las principales diferencias en los tres artículos:

Djaferis: trabaja mapeos, expresados por medio de productos vector-matriz, que preservan la estabilidad y utiliza como técnica el mapeo de coeficientes de polinomios en coeficientes de polinomios. Muestra la facilidad de representar una substitución de una función racional en un polinomio en términos de productos vector-matriz. Presenta condiciones suficientes para SPM y no para SSPM.

Fernández: Trabaja por medio de composición de funciones. Substitución de funciones racionales SPR0 en funciones racionales. Presenta condiciones suficientes para la preservación de la estabilidad y factorización coprima de las funciones de transferencia.

Polyak: Trabaja por medio de composiciones $D(f(s))$. $D(p)$ es un polinomio y $f(s)$ es la función de transferencia, o sea, una función racional. Establece condiciones necesarias y suficientes para el criterio de estabilidad planteado. Para verificar sus condiciones se debe trabajar caso por caso, obteniendo los dominios H para cada función $f(s)$.

Se pueden sin embargo establecer ciertas similitudes en los artículos. Las composiciones polinomio-función racional con las que trabaja Polyak pueden ser representadas como productos vector-matriz de las que podrían obtenerse operadores lineales del tipo SPM de Djaferis; se puede observar que la aplicación del corolario 1 del artículo de Polyak al caso particular de componentes estables, al multiplicar por el denominador de $f(s)$ la composición $D(f(s))$, se obtiene la transformación lineal SPM correspondiente.

Podemos ver también que, en el uso de las pruebas propuestas por Djaferis para la identificación de si una matriz dada es una SPM, se podría hacer uso del criterio de estabilidad de Polyak. Cuando la matriz en cuestión corresponde a una composición, el criterio mencionado nos determina las condiciones necesarias y suficientes para la verificación de dicha matriz como una SPM.

Algunas ventajas y desventajas de los resultados publicados en los artículos revisados son las siguientes:

Aún cuando el criterio de estabilidad de Polyak establece condiciones necesarias y suficientes, se ve claramente la desventaja de tener que calcular el dominio-H para cada uno de los casos que se quiera analizar; la obtención de dominios-H para una familia infinita de funciones resulta una tarea difícil. En el planteamiento de Fernández no se tiene este problema.

La relación clara entre Djaferis y Polyak es la siguiente: la composición de funciones con las que trabaja Polyak puede ser representada en términos de un operador lineal del tipo SPM de

Djaferis. Esto hace que la propuesta de Djaferis sea más general pues hay casos que pueden ser representados también como productos vector-matriz que no son necesariamente composiciones.

Djaferis trabaja con polinomios de tamaño fijo; esto representa una desventaja en relación a los otros dos autores pues al utilizar substituciones como las planteadas por ellos el tamaño del polinomio no importa, lo que representa cierta ventaja.

El planteamiento de Djaferis, en el contexto de estabilización simultanea de un número finito de plantas, provee de una forma relativamente sencilla de diseñar un controlador, bajo la restricción de que éste sea de orden fijo. Es importante resaltar que el concepto de SPM tiene la limitación de mapear **solo un** polinomio lo cual limita la utilidad en la problematica de estabilización robusta y representa una seria desventaja en el trabajo de Djaferis; por lo que nuestro interés se centra en los operadores SSPM.

Una relación significativa, entre Fernández y Djaferis es que la matriz generada al sustituir una SPR0 en un polinomio estable, en el sentido de Djaferis, genera un operador SSPM. Con esto se ve que se puede generar una familia infinita de operadores SSPM (ver la demostración por construcción presentada en este trabajo).

Por ultimo es importante resaltar que la preservación de la factorización coprima que plantea Fernández es de utilidad en síntesis de controladores (cuando la síntesis se basa en la caracterización de familias de controladores estabilizantes).

Una limitante en el trabajo de Fernández es que las substituciones que se presentan son únicamente para funciones del tipo SPR0.

3.3 Aplicaciones a control robusto

3.3.1 B. Polyak

Estabilidad Robusta

Conjunto cero N de una familia de polinomios $\mathcal{D}$

$$N = \{p \in \mathbb{C} : D(p) = 0, D \in \mathcal{D}\}$$

Conjunto de valores Q de una familia de funciones de transferencia F

$$Q(\omega) = \{f(j\omega), f(s) \in \mathcal{F}\}$$

Suposición 1. $\mathcal{D}$ es una familia de polinomios de grado n, perteneciente a un conjunto conectado, con un conjunto cero N acotado.

Esta condición es satisfecha si, por ejemplo, $|d_k| \leq c$, $k = 0, ..., n-1$, $|d_n| \geq \varepsilon > 0$ para $D \in \mathcal{D}$ (d_k son los coeficientes del polinomio D).

Considerando una familia de funciones racionales $f(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \in \mathcal{F}$, donde $A(s)$ y $B(s)$ son polinomios, el grado de $A = k$, y el grado de $B = m$, $B(j\omega) \neq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, además de que la función f tiene l polos derechos. Una de las dos siguientes suposiciones será verdadera:

Suposición 2a. La familia $\mathcal{F}$ es una familia conectada y acotada de funciones propias en H^{∞} que no tiene polos imaginarios; sin embargo, la familia tiene idéntico número de polos derechos l.

Suposición 2b. La familia $\mathcal{F}$ es una familia conectada de funciones impropias que no tiene polos imaginarios, para la cual el número $k > m$ es el mismo para toda $f \in \mathcal{F}$.

Teorema 2. Principio de exclusión del cero. Composición polinomio - funciones racionales. Siendo $\mathcal{D}$ una familia de polinomios que satisface la suposición 1 y siendo $\mathcal{F}$ una familia de funciones de transferencia que obedece cualquiera de las dos suposiciones $2a$ o $2b$. Entonces, la familia:

$$\mathcal{G} = \{G(s) = D(f(s)), D \in , f \in F\}$$

será robustamente estable si y sólo sí las dos condiciones siguientes se satisfacen:

a) Existe un polinomio $D_0 \in \mathcal{D}$ y una función $f_0 \in \mathcal{F}$ tal que $G_0(s) = D_0(f_0(s))$ es estable.

b) El conjunto cero N no se intersecta con el conjunto de valores Q para ningún $\omega \in \mathbb{R}$.

$N \cap Q(\omega) = \varnothing$, $-\infty < \omega < \infty$

Teorema 3. Generalización del teorema de Kharitonov. Composición polinomio - multiplicación de polinomios. Se multiplican un polinomio que no tiene ceros izquierdos con los cuatro polinomios a intervalos de Kharitonov de una determinada familia y estos se componen con un polinomio fijo $D(p)$.

Siendo $D(p)$ un polinomio fijo determinado y

$$F = \{f(s) = B(s)A(s), A(s) \in \mathcal{A}\}$$

donde $\mathcal{A}$ es una familia de polinomios a intervalos y $B(s)$ es un polinomio que no tiene ceros izquierdos. La familia $\mathcal{G} = \{D(f(s)), f \in \mathcal{F}\}$ es robustamente estable si y sólo sí las cuatro funciones $G_i(s) = D(f_i(s))$, $f_i(s) = B(s)A_i(s)$, $i = 1, ..., 4$ son estables. Esta afirmación es también valida para para la familia $\mathcal{F}^{-1}$ esto es, $f(s) = 1/A(s)B(s)$.

Teorema 4. Teorema de las aristas. Composición de polinomio afín - funciones racionales afines. Definiendo:

$$\mathcal{D} = \{D(p) = D_0(p) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i D_i(p), \lambda_i \in \mathbb{R}, |\lambda_i| \leq 1, i = 1, ..., r\}$$

como una familia de polinomios afines.

$$E = \{D(p) \in \ : |\lambda_i| = 1, \forall i \neq k, |\lambda_k| \leq 1, k = 1, ..., r\}$$

como el conjunto de todas las aristas.

$$\mathcal{F} = \{f(s) = \frac{A_0(s) + \sum_{i=1}^{q} \mu_i A_i(s)}{B_0(s) + \sum_{i=1}^{q} \mu_i B_i(s)}, \mu_i \in \mathbb{R}, |\mu_i| \leq 1, i = 1, ..., q\}$$

como una familia de funciones racionales cuya estructura es afín.

Utilizando las definiciones anteriores establecemos que:

$$\mathcal{G} = \{G(s) = D(f(s)), D \in \ , f \in F\}$$

es robustamente estable si y sólo sí todas las aristas del sistema son estables.

3.3.2 T. Djaferis

Las pruebas para verificar si una determinada matriz es un operador del tipo SPM, planteadas por Djaferis en este artículo, pueden ser utilizadas en los procedimientos de diseño de controladores robustos, para el caso de familias de plantas con incertidumbre paramétrica a donde

a cae en alguna region $\Omega_a \in \mathbb{R}$. Esto es, cuando hay una familia de plantas $P(s,a)$ que consiste de plantas de orden $\tilde{n}$ se utilizará un controlador de orden $\tilde{n}-1$ y se forma la matriz $A_a = S_{\tilde{n}}(d_{p0}(s), n_{p0}(s))^{-1} S_{\tilde{n}}(d_p(s,a), n_p(s,a))$. Entonces se procede a verificar si el conjunto de mapeos f_a que se genera es una familia de operadores SPM para toda $a \in \Omega_a$.

El procedimiento se puede sintetizar de la siguiente manera:

- Para la familia específica de plantas, se genera la matriz apropiada A_a y se verifica si esta matriz genera una familia de mapeos que preservan la estabilidad f_a . En otras palabras se prueba si la matriz A_a posee una de las propiedades de estabilidad propuestas. Con esto se podrá identificar una familia de polinomios ϕ estables con una estructura específica que son parametrizados por q.

- Se procede a probar polinomios con esta estructura hasta identificar (si es posible) uno que sea mapeado por A_a a polinomios estables.

- Finalmente se construye el controlador robusto para esta familia haciendo:

$$x = \phi S_{\tilde{n}}(d_{p0}(s), n_{p0}(s))^{-1}.$$

En lo que se refiere a familias de plantas con incertidumbre paramétrica: utilizando la técnica SPM se construye la matriz y se procede a verificar si el mapeo que se genera es una familia SPM para toda $a \in \Omega$.

3.3.3 G. Fernández

Con los primeros resultados establece que compensadores constantes estabilizan robustamente plantas si se varían continuamente los parámetros de las funciones SPR0 en sus intervalos. Al variar el orden de las funciones SPR0 obtendremos estabilización simultanea usando compensadores constantes.

Definiendo:

$$\hat{G}(s) = \{G(s) : G(s) = A(s)/B(s)\}$$

donde $A(s) \in \bar{A}(s)$ y $B(s) \in \mathcal{B}(s)$ con

$$\begin{aligned}\bar{A}(s) &= \{A(s) : A(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k, \quad a_k \in [\underline{a_k}, \overline{a_k}], \quad k = 0, 1, ..., n\} \\ \mathcal{B}(s) &= \{B(s) : B(s) = \sum_{k=0}^{n} b_k s^k, \quad b_k \in [\underline{b_k}, \overline{b_k}], \quad k = 0, 1, ..., n\}\end{aligned}$$

polinomios reales a intervalos.

Teorema 4. Siendo $pol(s) = \{P(s) : P(s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k(s) \ ; \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \ ; \ \alpha_k \geq 0$ y $P_k(s)$ es una función SPR0 para cada $k\}$ un politopo de funciones SPR0. Supongamos que el controlador $C(s)$ estabiliza la planta $P(s)$ y todos los elementos de la familia $\hat{G}(s)$ son funciones SPR0. Entonces tenemos lo siguiente:

- El controlador $C(q(s))$ estabiliza las plantas $P(q(s))$ para cada $q(s) \in \hat{G}(s)$ y también para cada $q(s) \in pol(s)$.

Generaliza el teorema de Kharitonov. Teniendo una familia de funciones racionales del tipo SPR0, cuyo numerador y denominador son polinomios a intervalos con sus correspondientes polinomios estables de Kharitonov, obtiene una familia de polinomios y de funciones racionales estables. Lo mismo para el politopo de funciones SPR0.

Teorema 7. Si $\hat{G}(s) = \{G(s) : G(s) = A(s)/B(s)\}$ es una familia de funciones SPR0, donde $A(s) \in \bar{A}(s)$ y $B(s) \in \mathcal{B}(s)$:

$$\begin{aligned}\bar{A}(s) &= \{A(s) : A(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k \text{ y } a_k \in [\underline{a_k}, \overline{a_k}], \ k = 0, 1, ..., n\} \\ \mathcal{B}(s) &= \{B(s) : B(s) = \sum_{k=0}^{n} b_k s^k \text{ y } b_k \in [\underline{b_k}, \overline{b_k}], \ k = 0, 1, ..., n\}\end{aligned}$$

y si los siguientes polinomios de Kharitonov $K_{\hat{C}}^{i}(s)$ asociados con la familia:

$$\hat{C}(s) = \{C(s) : C(s) = \sum_{k=0}^{n} c_k s^k \text{ y } c_k \in [\underline{c_k}, \overline{c_k}]\}$$

son estables para $i = 1, 2, 3, 4$, entonces para $\hat{C}(s)$ tenemos lo siguiente:

1. La familia de polinomios $\widetilde{D}_1(s) = \{D_1(s) : D_1(s) = \sum_{k=0}^{m} c_k A(s)^k B(s)^{m-k}, c_k \in [\underline{c_k}, \overline{c_k}]$,

$A(s) \in \bar{A}(s)$, $B(s) \in \mathcal{B}(s)$ para $k = 0, 1, ..., n\}$ es estable.

2. $\widetilde{P}_1(s) = \{P_1(s) : P_1(s) = B(s)^m[\sum_{k=0}^{m} c_k A(s)^k B(s)^{m-k}]^{-1}, c_k \in [\underline{c_k}, \overline{c_k}]$, $A(s) \in \bar{A}(s)$, $B(s) \in \mathcal{B}(s)$ para $k = 0, 1, ..., n\} \subset RH^\infty$.

3. La familia de polinomios

   $\widetilde{D}_2(s) = \{D_2(s) : D_2(s) = \sum_{k=0}^{m} c_k N_q(s)^k D_q(s)^{m-k}, c_k \in [\underline{c_k}, \overline{c_k}]\ \forall\ k = 0, 1, ..., n\}$ es estable para $q(s) \in pol(s)$ con $q(s) = \frac{N_q(s)}{D_q(s)}$.

4. $\widetilde{P}_2(s) = \{P_2(s) : P_2(s) = D_q(s)^m[\sum_{k=0}^{m} c_k N_q(s)^k D_q(s)^{m-k}]^{-1}, c_k \in [\underline{c_k}, \overline{c_k}]$, para $k = 0, 1, ..., n\} \subset RH^\infty$ para cada $q(s) \in pol(s)$ con $q(s) = \frac{N_q(s)}{D_q(s)}$.

Teniendo una familia de funciones SPR0 y una familia de plantas de grado relativo cero formadas por los polinomios de Kharitonov correspondientes, garantiza una familia de funciones SPR0 al utilizar el denominador y numerador a intervalos de la familia SPR0 y también el numerador y denominador del politopo de funciones SPR0.

Teorema 8. Si $\hat{G}(s)$ es una familia de funciones SPR0,

$$\hat{H}(s) = \{H(s) : H(s) = [\sum_{k=0}^{n} n_k s^k][\sum_{k=0}^{n} d_k s^k]^{-1}$$

donde $n_k \in [\underline{n_k}, \overline{n_k}]$, $d_k \in [\underline{d_k}, \overline{d_k}]$ para $k = 0, 1, ..., r\}$ es una familia de funciones de grado relativo cero y las 8 plantas siguientes:

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{K_N^2(s)}{K_D^1(s)} \quad H_5(s) = \frac{K_N^1(s)}{K_D^3(s)} \\ H_2(s) &= \frac{K_N^3(s)}{K_D^1(s)} \quad H_6(s) = \frac{K_N^4(s)}{K_D^3(s)} \\ H_3(s) &= \frac{K_N^1(s)}{K_D^2(s)} \quad H_7(s) = \frac{K_N^2(s)}{K_D^4(s)} \\ H_4(s) &= \frac{K_N^4(s)}{K_D^2(s)} \quad H_8(s) = \frac{K_N^3(s)}{K_D^4(s)} \end{aligned}$$

son SPR0 se tiene lo siguiente:

1. La familia $\hat{H}_1(s) = \{H_1(s) : H_1(s) = [\sum_{k=0}^{r} n_k A(s)^k B(s)^{r-k}][\sum_{k=0}^{r} d_k A(s)^k B(s)^{r-k}]^{-1}$ donde $n_k \in [\underline{n_k}, \overline{n_k}]$, $d_k \in [\underline{d_k}, \overline{d_k}]$, $A(s) \in \bar{A}(s)$, $B(s) \in \mathcal{B}(s)$ para $k = 0, 1, ..., r\}$ es una

familia de funciones SPR0.

2. La familia $\hat{H}_2(s) = \{H_2(s) : H_2(s) = [\sum_{k=0}^{r} n_k N_q(s)^k D_q(s)^{r-k}][\sum_{k=0}^{r} d_k N_q(s)^k D_q(s)^{m-k}]^{-1}$ donde $n_k \in [\underline{n_k}, \overline{n_k}]$, $d_k \in [\underline{d_k}, \overline{d_k}]$, para $k = 0, 1, ..., r\}$ es una familia de funciones SPR0 para cada $q(s) \in pol(s)$ con $q(s) = \frac{N_q(s)}{D_q(s)}$.

3.3.4 Análisis

En el artículo de Polyak se presentan varias generalizaciones: en primer lugar, por medio de la construcción de los conjuntos cero y de valores utilizados comúnmente en la teoría de estabilidad robusta (para una familia específica de polinomios y de funciones racionales) se generaliza el principio de exclusión del cero. Posteriormente se generaliza el teorema de Kharitonov para la composición de un polinomio fijo y una familia de polinomios formada por medio de la multiplicación de polinomios a intervalos por un polinomio que no tiene ceros izquierdos. Finalmente se plantea el teorema de las aristas para la composición de una familia de polinomios afines y una familia de funciones racionales afines.

Djaferis presenta una forma de diseñar un controlador que controle una familia de plantas con incertidumbre real paramétrica, por medio de la obtención de una familia de mapeos que preservan la estabilidad.

Fernández presenta resultados sobre estabilización robusta y simultanea utilizando compensadores constantes y generaliza el teorema de Kharitonov para presentar resultados sobre la robustez de funciones SPR y estabilidad robusta para la composición de familias de polinomios y familias de plantas.

En la parte correspondiente a la robustez tal y como se estudia en los tres artículos, las relaciones no son tan evidentes como las relaciones mostradas en la primera parte. Sin embargo se puede externar lo siguiente:

Es claro que lo correspondiente a Djaferis y a Polyak puede relacionarse, así como se puede relacionar lo correspondiente a Djaferis y Fernández. Esto es, es posible que las composiciones con las que trabaja Polyak puedan tratarse como funciones SPM robustas al variar ciertos parámetros en la matriz y seguir teniendo operadores SPM. En el caso de Djaferis y Fernández, los resultados se pueden relacionar bajo la condición de que los polinomios y funciones racionales utilizados sean de orden fijo, que es la clara restricción en el trabajo de Djaferis. En el caso de

Polyak y Fernández, la condición establecida por Polyak de que uno de los polinomios tenga l ceros derechos hace que el trabajo realizado por éste excluya a lo realizado por Fernández. Un estudio a profundidad de lo discutido en este párrafo requeriría un esfuerzo de investigación importante que está fuera de lo comprendido en este trabajo de tesis. Esta temática podría constituir de hecho un trabajo de investigación posterior.

Capítulo 4

Contribuciones teóricas

4.1 Introducción

El conjunto de resultados presentados en este capítulo constituye la parte central del trabajo de tesis presentado. En la primera proposición se obtiene una familia de operadores SSPM via substituciones, metodología que se ilustra por medio de un ejemplo. Posteriormente se presentan condiciones suficientes para la cerradura de funciones SPR0 asociadas a la utilización del producto Hadamard; lo obtenido se puede representar en términos de productos vector-matriz, con lo cual se extiende el teorema de Talbot ([11]). Cabe remarcar que también se muestra la utilización de secuencias multiplicativas no-negativas en la construcción de operadores lineales.

4.2 Operadores SSPM y substituciones

Esta primera proposición es una manera de obtener una familia de operadores lineales del tipo SSPM por medio de la substitución de una función real estrictamente positiva de grado relativo cero en un polinomio Hurwitz.

Proposición 19 *Siendo $Q(s)$ una función real estrictamente positiva de grado relativo cero con coeficientes arbitrarios, es decir:*

$$Q(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + ... + b_0} \in SPR0$$

y siendo $\phi(\lambda)$ un polinomio Hurwitz estable:

$$\phi(\lambda) = \phi_m \lambda^m + \phi_{m-1}\lambda^{m-1} + ... + \phi_0,$$

entonces

$$\psi(s) = (b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0)^m \phi[Q(s)]$$

es un polinomio Hurwitz.

Corolario 20 *Las representaciones matriciales formadas cuando los coeficientes de esta composición se agrupan apropiadamente corresponden a una familia infinita de operadores SSPM.*

Prueba.

Haciendo la substitución:

$\psi(s) = \left(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0\right)^m \cdot \phi(\lambda)\rfloor_{\lambda = \frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0}}$
$\psi(s) = \left(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0\right)^m \cdot \{\phi_m \left(\frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0}\right)^m$
$+\phi_{m-1}\left(\frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0}\right)^{m-1} + \phi_{m-2}\left(\frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0}\right)^{m-2}$
$+\phi_{m-3}\left(\frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0}\right)^{m-3} ...... + \phi_0\}$
$\psi(s) = \phi_m \left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0\right)^m + \phi_{m-1}\left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0\right)^{m-1}$
$\cdot \left(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0\right) + \phi_{m-2}\left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0\right)^{m-2}$
$\cdot \left(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0\right)^2 + \phi_{m-3}\left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0\right)^{m-3}$
$\cdot \left(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0\right)^3 + ... + \phi_0\left(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0\right)^m$

En esta parte será necesario utilizar la formula multinomial para poder escribir estos coeficientes en forma compacta, siendo esta:

$$(y_1 + y_2 + ... + y_p)^n = \sum \frac{n!}{x_1!x_2!.....x_p!} y_1^{x_1} y_2^{x_2} ...... y_p^{x_p}$$

donde la suma toma a todos los enteros no negativos $x_1, x_2, ..., x_p$ para los que $x_1 + x_2 + ... + x_p = n$.

La expresión para $\psi(s)$ se puede entonces escribir así

$\psi(s) = \phi_m \{\sum \frac{(m)!}{x_1!x_{2!}......x_{n+1}!} \cdot (a_n s^n)^{x_1} \left(a_{n-1}s^{n-1}\right)^{x_2} ...... (a_1 s)^{x_n} (a_0)^{x_{n+1}}\}$
$+\phi_{m-1}\{\sum[\frac{(m-1)!}{x_1!x_{2!}......x_{n+1}!} (a_n s^n)^{x_1} \cdot \left(a_{n-1}s^{n-1}\right)^{x_2} ...... (a_1 s)^{x_n} (a_0)^{x_{n+1}}]$

$\cdot[b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0]\} + \phi_{m-2}\{\sum[\frac{(m-2)!}{x_1!x_{2!}......x_{n+1}!}\left(a_n s^n\right)^{x_1}\left(a_{n-1}s^{n-1}\right)^{x_2}......\left(a_1 s\right)^{x_n}$
$\cdot\left(a_0\right)^{x_{n+1}}][b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0]^2\} + \phi_{m-3}\{\sum[\frac{(m-3)!}{x_1!x_{2!}......x_{n+1}!}\left(a_n s^n\right)^{x_1}$
$\cdot\left(a_{n-1}s^{n-1}\right)^{x_2}......\left(a_1 s\right)^{x_n}\left(a_0\right)^{x_{n+1}}]\cdot[b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0]^3\}+$
$....... + \phi_0\{\sum\frac{(m)!}{x_1!x_{2!}......x_{n+1}!}\cdot\left(b_n s^n\right)^{x_1}\left(b_{n-1}s^{n-1}\right)^{x_2}.......\left(b_1 s\right)^{x_n}\left(b_0\right)^{x_{n+1}}\}$

desarrollando y agrupando términos

$\psi\left(s\right) = \phi_m\{\sum\frac{(m)!}{x_1!x_{2!}......x_{n+1}!}a_n^{x_1}a_{n-1}^{x_2}....a_1^{x_n}\cdot a_0^{x_{n+1}}s^{nx_1+x_2(n-1)+.....+x_n}\}$
$+\phi_{m-1}\{[\sum\frac{(m-1)!}{x_1!x_{2!}......x_{n+1}!}a_n^{x_1}a_{n-1}^{x_2}....a_1^{x_n}\cdot a_0^{x_{n+1}}s^{nx_1+x_2(n-1)+.....+x_n}][b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0]\}$
$+\phi_{m-2}\{[\sum\frac{(m-2)!}{x_1!x_{2!}......x_{n+1}!}a_n^{x_1}a_{n-1}^{x_2}....a_1^{x_n}\cdot a_0^{x_{n+1}}s^{nx_1+x_2(n-1)+.....+x_n}]$
$\cdot[\sum\frac{2!}{x_1!x_{2!}......x_{n+1}!}b_n^{x_1}b_{n-1}^{x_2}....b_1^{x_n}b_0^{x_{n+1}}s^{nx_1+x_2(n-1)+.....+x_n}]\}+$
$\phi_{m-3}\{[\sum\frac{(m-3)!}{x_1!x_{2!}......x_{n+1}!}a_n^{x_1}a_{n-1}^{x_2}....a_1^{x_n}a_0^{x_{n+1}}s^{nx_1+x_2(n-1)+.....+x_n}]$
$\cdot[\sum\frac{3!}{x_1!x_{2!}......x_{n+1}!}b_n^{x_1}b_{n-1}^{x_2}....b_1^{x_n}b_0^{x_{n+1}}s^{nx_1+x_2(n-1)+.....+x_n}]\}+$
$..... + \phi_0\{\sum\frac{(m)!}{x_1!x_{2!}......x_{n+1}!}b_n^{x_1}b_{n-1}^{x_2}....b_1^{x_n}b_0^{x_{n+1}}s^{nx_1+x_2(n-1)+.....+x_n}\}$

Con esto, se puede desarrollar la relación $\phi A = \psi$ y obtener el operador lineal SSPM. ■

Se mostrará este procedimiento con un ejemplo en el que se usará una función real estrictamente positiva de grado relativo cero con coeficientes arbitrarios y un polinomio Hurwitz de tercer grado.

Ejemplo 1 *Teniendo* $Q(s)=\frac{as^2+bs+c}{ds^2+es+f}\in SPR0$ *y* $\phi(\lambda)=\phi_3\lambda^3+\phi_2\lambda^2+\phi_1\lambda+\phi_0\in H$ *entonces:*

$\psi(s)=(ds^2+es+f)^3\phi[Q(s)]$

$\psi(s)=(ds^2+es+f)^3\phi(\lambda)\mid_{\lambda=\frac{as^2+bs+c}{ds^2+es+f}}$

$\psi(s)=(ds^2+es+f)^3\{\phi_3(\frac{as^2+bs+c}{ds^2+es+f})^3+\phi_2(\frac{as^2+bs+c}{ds^2+es+f})^2+\phi_1(\frac{as^2+bs+c}{ds^2+es+f})+\phi_0\}$

$\psi(s)=\phi_3(as^2+bs+c)^3+\phi_2(as^2+bs+c)^2(ds^2+es+f)+$

$\phi_1(as^2+bs+c)(ds^2+es+f)^2+\phi_0(ds^2+es+f)^3$

$\psi(s)=\phi_3(a^3s^6+3a^2s^5b+3a^2s^4c+3as^4b^2+6as^3bc+3as^2c^2+b^3s^3+$

$3b^2s^2c+3bsc^2+c^3)+\phi_2\{(a^2s^4+2as^3b+2as^2c+b^2s^2+2bsc+c^2)(ds^2+es+f)\}$

$+\phi_1\{(as^2+bs+c)(d^2s^4+2es^3d+2ds^2f+e^2s^2+2esf+f^2)\}+\phi_0(d^3s^6+3es^5d^2+$

$3d^2s^4f+3e^2s^4d+6es^3df+3ds^2f^2+e^3s^3+3e^2s^2f+3esf^2+f^3)$ *como se ve obtuvimos un polinomio en "s", y los coeficientes de* $\psi(s)$ *son expresiones lineales de* ϕ_i *para* $i=0,....,6$. *Simplificando:*

$\psi_6=s^6(\phi_3a^3+\phi_2a^2d+\phi_1ad^2+\phi_0d^3)$

$\psi_5=s^5(\phi_33a^2b+\phi_2(a^2e+2abd)+\phi_1(2acd+bd^2)+\phi_03ed^2)$

$\psi_4=s^4(\phi_3(3a^2c+3ab^2)+\phi_2(a^2f+2abe+2acd+b^2d)+$

$\phi_1(2adf+ae^2+2bed)+\phi_0(3d^2f+3e^2d))$

$\psi_3=s^3(\phi_3(6abc+b^3)+\phi_2(2abf+2ace+b^2e+2bcd)+$

$\phi_1(2aef+2bdf+be^2+2ced)+\phi_0(6edf+e^3))$

$\psi_2=s^2(\phi_3(3ac^2+3b^2c)+\phi_2(2acf+b^2f+2bce+c^2d)+$

$\phi_1(af^2+2bef+2cdf+ce^2)+\phi_0(3df^2+3e^2f))$

$\psi_1=s(\phi_33bc^2+\phi_2(2bcf+c^2e)+\phi_1(bf^2+2cef)+\phi_03ef^2)$

$\psi_0=\phi_3c^3+\phi_2c^2f+\phi_1cf^2+\phi_0f^3$ *con esto podemos proceder a escribir*

$$\begin{bmatrix}\phi_3\\ \phi_2\\ \phi_1\\ \phi_0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}m_{11}&m_{12}&m_{13}&m_{14}\\ m_{21}&m_{22}&m_{23}&m_{24}\\ m_{31}&m_{32}&m_{33}&m_{34}\\ m_{41}&m_{42}&m_{43}&m_{44}\\ m_{51}&m_{52}&m_{53}&m_{54}\\ m_{61}&m_{62}&m_{63}&m_{64}\\ m_{71}&m_{72}&m_{73}&m_{74}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\psi_6&\psi_5&\psi_4&\psi_3&\psi_2&\psi_1&\psi_0\end{bmatrix}$$

donde:

$m_{11} := a^3,$

$m_{12} := a^2d,$

$m_{13} := ad^2,$

$m_{14} := d^3,$

$m_{21} := 3a^2b,$

$m_{22} := a^2e + 2abd,$

$m_{23} := 2acd + bd^2,$

$m_{24} := 3ed^2,$

$m_{31} := 3a^2c + 3ab^2,$

$m_{32} := a^2f + 2abe + 2acd + b^2d,$

$m_{33} := 2adf + ae^2 + 2bed,$

$m_{34} := 3d^2f + 3e^2d,$

$m_{41} := 6abc + b^3,$

$m_{42} := 2abf + 2ace + b^2e + 2bcd,$

$m_{43} := 2aef + 2bdf + be^2 + 2ced,$

$m_{44} := 6edf + e^3,$

$m_{51} := 3ac^2 + 3b^2c,$

$m_{52} := 2acf + b^2f + 2bce + c^2d,$

$m_{53} := af^2 + 2bef + 2cdf + ce^2,$

$m_{54} := 3df^2 + 3e^2f,$

$m_{61} := 3bc^2,$

$m_{62} := 2bcf + c^2e,$

$m_{63} := bf^2 + 2cef,$

$m_{64} := 3ef^2,$

$m_{71} := c^3,$

$m_{72} := c^2f,$

$m_{73} := cf^2,$

$m_{74} := f^3.$

Esto es un operador lineal SSPM que mapea preservando la estabilidad de todo polinomio estable de orden fijo.

4.3 Cerradura de funciones SPR0 y producto Hadamard

La siguiente proposición presenta condiciones suficientes para la cerradura de funciones SPR0 toda vez que se aplique el producto Hadamard en numerador y denominador de una función SPR0. Posteriormente mostramos como este resultado puede ser representado como un producto vector-matriz, es decir, como un operador lineal SSPM.

Proposición 21 *Siendo*

$$
\begin{aligned}
p(s) &= p_n s^n + ... + p_0 \\
q(s) &= q_n s^n + ... + q_0 \\
p'(s) &= p'_n s^n + ... + p'_0 \\
q'(s) &= q'_n s^n + ... + q'_0
\end{aligned}
$$

Si

$$\frac{p(s)}{q(s)}, \frac{p'(s)}{q'(s)} \in SPR0$$

y todos los menores de orden par de $\triangle_{2p}^{\circ}$ *son positivos, entonces*

$$\frac{p(s) \circ p'(s)}{q(s) \circ q'(s)} \in SPR0$$

donde:

$$\begin{aligned} F(s,\alpha) &= q(s) \circ q'(s) + j\alpha(p(s) \circ p'(s)) \\ \triangle_{2p}^{\circ} &= \begin{bmatrix} a_0^{\sim} & a_1^{\sim} & ..... & a_{2p-1}^{\sim} \\ b_0^{\sim} & b_1^{\sim} & .... & b_{2p-1}^{\sim} \\ 0 & a_0^{\sim} & .... & a_{2p-2}^{\sim} \\ 0 & b_0^{\sim} & .... & b_{2p-2}^{\sim} \\ .... & .... & .... & .... \end{bmatrix} \end{aligned}$$

para $p = 1, 2, ..., n$, $a_k = b_k = 0$ *para* $k > n$ *las entradas de la matriz son:*

$$\begin{array}{ll} a_0^{\sim} = \alpha\,(-1)^m\, p_0p_0' & b_0^{\sim} = (-1)^m\, q_0q_0' \\ a_1^{\sim} = (-1)^{m-1}\, q_1q_1' & b_1^{\sim} = -\alpha\,(-1)^{m-1}\, p_1p_1' \\ a_{n-3}^{\sim} = -q_{2m-3}q_{2m-3}' & b_{n-3}^{\sim} = \alpha p_{2m-3}p_{2m-3}' \\ a_{n-2}^{\sim} = -\alpha p_{2m-2}p_{2m-2}' & b_{n-2}^{\sim} = -q_{2m-2}q_{2m-2}' \\ a_{n-1}^{\sim} = q_{2m-1}q_{2m-1}' & b_{n-1}^{\sim} = -\alpha p_{2m-1}p_{2m-1}' \\ a_n^{\sim} = \alpha p_{2m}p_{2m}' & b_n^{\sim} = q_{2m}q_{2m}' \end{array}$$

para toda α *en los reales.*

Prueba.

Siguiendo el teorema 11, se verificarán las tres condiciones en él establecidas:

1. Por hipótesis ambas funciones de transferencia son funciones SPR0 por lo que numerador y denominador de ambas son polinomios Hurwitz, con lo cual el producto Hadamard en numerador y denominador es también polinomio Hurwitz, pues producto Hadamard de polinomios Hurwitz estables es también Hurwitz estable ([10]); resulta evidente pues que $\mathrm{Re}\left[\frac{p(0)\circ p'(0)}{q(0)\circ q'(0)}\right] > 0$.

2. Utilizando el mismo argumento del punto 1, queda claro también que el numerador resultante de haber sido aplicado el producto Hadamard entre numeradores y denominadores

de ambas funciones de transferencia (que al ser funciones SPR0 son polinomios Hurwitz) es un polinomio Hurwitz estable.

3. La positividad de los menores de orden par de $\triangle_{2p}^{\circ}$ donde $p = 1, 2, ..., n$, $a_k = b_k = 0$, para $k > n$, garantiza que el polinomio $q(s) \circ q'(s) + j\alpha(p(s) \circ p'(s))$ es Hurwitz para toda $\alpha \in \mathbb{R}$. ■

Observación 6 *Por medio del uso de las condiciones del resultado anterior, y como se ha visto a lo largo de este trabajo* $p \circ p' = pA_{p'}$ *donde*

$$A_{p'} = \begin{bmatrix} p'_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p'_n \end{bmatrix}$$

es posible representar el producto Hadamard operado en numerador y denominador de la función real estrictamente positiva de grado relativo cero como un producto vector-matriz, entonces, si $\frac{p}{q} \in$ *SPR0 y* $A_{p'} \leftrightarrow p'$, $A_{q'} \leftrightarrow q'$ *con lo cual podemos afirmar que,* $\frac{pA_{p'}}{qA_{q'}} \in$*SPR0, donde* $A_{p'} \leftrightarrow p'$ *significa que* $A_{p'}$ *es la matriz diagonal asociada al polinomio* p'*, de tal forma que se puede representar como un operador SSPM. Es importante resaltar que este resultado no es una consecuencia del teorema de Talbot [11], dado que los operadores lineales que se obtienen en numerador y denominador son diferentes operadores. También, notar que el resultado tampoco es una consecuencia de[7], por el argumento anterior; por lo que hasta donde sabemos éste es un nuevo resultado para este tipo de operadores.*

Corolario 22 *Si* $\frac{p}{q} \in$ *SPR0 y todos los menores de orden par de* $\triangle_{2p}^{\circ}$ *son positivos*

$$\triangle_{2p}^{\circ} = \begin{bmatrix} a_0^{\sim} & a_1^{\sim} & ..... & a_{2p-1}^{\sim} \\ b_0^{\sim} & b_1^{\sim} & .... & b_{2p-1}^{\sim} \\ 0 & a_0^{\sim} & .... & a_{2p-2}^{\sim} \\ 0 & b_0^{\sim} & .... & b_{2p-2}^{\sim} \\ .... & .... & .... & .... \end{bmatrix}$$

con $p = 1, 2, ..., n$, $a_k = b_k = 0$ *para* $k > n$ *donde*

$$
\begin{array}{ll}
a_0^{\sim} = \alpha\,(-1)^m\, p_0^n & b_0^{\sim} = (-1)^m\, q_0^n \\
a_1^{\sim} = (-1)^{m-1}\, q_1^n & b_1^{\sim} = -\alpha\,(-1)^{m-1}\, p_1^n \\
a_{n-3}^{\sim} = -q_{2m-3}^n & b_{n-3}^{\sim} = \alpha p_{2m-3}^n \\
a_{n-2}^{\sim} = -\alpha p_{2m-2}^n & b_{n-2}^{\sim} = -q_{2m-2}^n \\
a_{n-1}^{\sim} = q_{2m-1}^n & b_{n-1}^{\sim} = -\alpha p_{2m-1}^n \\
a_n^{\sim} = \alpha p_{2m}^n & b_n^{\sim} = q_{2m}^n
\end{array}
$$

entonces, $\frac{p^{[n]}}{q^{[n]}} \in SPR0\ \forall n \in Z^+$ *, donde* $p^{[n]} = p \circ p^{[n-1]}$.

Prueba.

Como consecuencia directa del último resultado vemos que la afirmación es verdadera para $\frac{p\circ p}{q\circ q} \in$ SPR0; por hipótesis asumimos que $\frac{p^{[n]}}{q^{[n]}} \in$ SPR0 nuevamente, como consecuencia del último resultado $\frac{p^{[n]}\circ p}{q^{[n]}\circ q} \in$ SPR0 entonces $\frac{p^{[n+1]}}{q^{[n+1]}}$ es verdadero y $\frac{p^{[n]}}{q^{[n]}} \in$ SPR0, con lo que la prueba por inducción queda completa. ■

Corolario 23 *Si se tienen dos operadores lineales del tipo SSPM, A y A′, y cualquier función real estrictamente positiva de grado relativo cero:*

$$R(s) := \frac{a(s)}{b(s)} = \frac{a_m s^m + ... + a_0}{b_m s^m + ... + b_0}$$

donde:

$$
\begin{aligned}
\phi A :=\ & [a_m, ..., a_0]A = & [\alpha_l, ..., \alpha_0] \\
\varphi A' :=\ & [b_m, ..., b_0]A' = & [\beta_l, ..., \beta_0],
\end{aligned}
$$

y todos los menores de orden par de la matriz:

$$
\triangle_{2p} = \begin{bmatrix}
\mu\alpha_0 & \mu\alpha_1 & ..... & \mu\alpha_{2p-1} \\
\beta_0 & \beta_1 & .... & \beta_{2p-1} \\
0 & \mu\alpha_0 & .... & \mu\alpha_{2p-2} \\
0 & \beta_0 & .... & \beta_{2p-2} \\
.... & .... & .... & ....
\end{bmatrix}
$$

con $p = 1, 2, ..., l$, $a_k = b_k = 0$ *para* $k > l$ *y para toda* $\mu \in \mathbb{R}$, *son positivos, entonces:*

$$R'(s) := \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{a_l s^l + ... + \alpha_0}{\beta_l s^l + ... + \beta_0}$$

es una función real estrictamente positiva de grado relativo cero.

Prueba.

La prueba se basa en el teorema 11 [1]. Es claro que las condiciones 1 y 2 del teorema se satisfacen. Para probar la tercera condición, consideramos el siguiente polinomio complejo:

$$(\beta_l s^l + ... + \beta_0) + j\mu(\alpha_l s^l + ... + \alpha_0),$$

y dado que todos los menores de orden par de la matriz $\triangle_{2p}$ son positivos para $p = 1, 2, ..., l$ y $\alpha_k = \beta_k = 0$ para $k > l$ y para toda $\mu \in \mathbb{R}$. Entonces en virtud del teorema 13 [9] queda satisfecha la tercera condición. Con lo que se afirma que $R'(s) \in$ SPR0. Lo que se cumplirá para cualquier función racional $R(s) \in$ SPR0.

4.4 Secuencias multiplicativas

Por medio del uso de secuencias en las que el producto término a término con un polinomio Hurwitz puede ser representado como un operador lineal del tipo SSPM se describe a continuación. En lo que sigue se representan indistintamente un polinomio y el vector real de sus coeficientes por medio del mismo símbolo $L[p(s)]$, el contexto determina el significado, para evitar excesos de notación.

Corolario 24 *Representando* $L[p(s)]$ *en términos de producto vector-matriz*

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_k \end{bmatrix} = L[p(s)] \quad (\textit{vector de coeficientes})$$

y haciendo uso del teorema 14, si $p(s) \in H$ y $L = \{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una secuencia multiplicativa no-negativa, entonces $L[p(s)] \in H$ con lo que claramente se ve que se tiene un operador del tipo SSPM.

Corolario 25 *Sea una familia de polinomios cuyas raíces son reales y negativas:*

$$p_f(s;x) = (s + f_1(x))...(s + f_n(x))$$

donde: $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ - \{0\}$ para $i = 1, ..., n$, son funciones reales continuas en la variable real x.

Siendo:

$$Q(s) = \frac{a(s)}{b(s)} = \frac{a_l s^n + ... + a_0}{b_n s^n + ... + b_0},$$

una función racional SPR0. Entonces

$$L_f[Q(s)] := \frac{L_f[a(s)]}{L_f[b(s)]} := \frac{p_f(n;x)a_l s^n + ... + p_f(0;x)a_0}{p_f(n;x)b_n s^n + ... + p_f(0;x)b_0},$$

donde:

$$L_f = \{p_f(k;x)\}_{k=0}^{\infty}$$

$L_f[Q(s)]$ será una función real estrictamente positiva de grado relativo cero para toda x real.

Prueba.

Es una consecuencia de [11], [2] y [3]. En efecto, por construcción la familia de polinomios $p_f(s;x)$ caracteriza una familia de secuencias CZDS y por ende es también una familia de secuencias multiplicativas. Al aplicar entonces cada miembro de la familia a un polinomio estable (lo cual se hace para el denominador y el denominador de la función real estrictamente positiva de grado relativo cero correspondiente) resulta en un polinomio estable. Y como se ha visto en el teorema de Talbot, la familia de funciones reales estrictamente positivas (de grado relativo cero) es cerrada ante la acción de los operadores representados por las secuencias multiplicativas debido a que preservan la estabilidad y son operadores lineales.

Observación 7 *El resultado precedente parametriza una familia de funciones estrictamente positivas de grado relativo cero en términos de un generador (la función estrictamente positiva* *real de grado relativo cero sobre la que se aplica la familia de operadores); los parámetros que caracterizan a la familia son aquellos implicados en la familia de secuencias multiplicativas.*

A través del estudio de las secuencias multiplicativas se puede postular la siguiente conjetura.

Conjetura 26 *Dada la clase de polinomios estables de Bessel ([5]), existe una secuencia multiplicativa que mapea algún polinomio estable a otro polinomio estable de este tipo.*

En el siguiente capítulo se mostraran los ejemplos que fueron el punto de partida para la conjetura anterior. Por medio de polinomios de Bessel de segundo y tercer grado ilustraremos la relación que existe entre polinomios estables y polinomios estables de Bessel por medio del uso de secuencias multiplicativas decrecientes.

La secuencia $L = \{h(k)\}_{k=0}^{\infty}$ es del tipo CZDS en virtud del teorema 15. Si $h(s)$ es tal que $h(0) \neq 0$ y todas las raíces son reales y negativas; Siendo $B(s)$ un polinomio de Bessel calculado de acuerdo a la definición 9. Entonces para un polinomio $p(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k$

$$L[p(s)] = \sum_{k=0}^{n} h(k) a_k s^k = B(s)$$

resolviendo por prueba y error se obtienen los coeficientes a_k de un polinomio estable.

Es interesante notar que para cada polinomio de la clase de Bessel se tiene un mapeo diferente dado por una secuencia multiplicativa y diferentes polinomios estables.

Capítulo 5

Ejemplos y aplicaciones

5.1 Introducción

En esta sección se presentan varios ejemplos en los que se muestra la aplicación de algunos conceptos expuestos en las contribuciones teóricas.

En el ejemplo 2 se ilustra como se representa en forma de producto vector- matriz (SSPM) el producto de una secuencia multiplicativa y un polinomio Hurwitz con base en el teorema 14 [2]. En el ejemplo 3 se muestra la aplicación de la secuencia multiplicativa en numerador y denominador de una función SPR0, con lo que se ilustra la utilización del teorema de Talbot y la preservación de la propiedad SPR. En los ejemplos 4 y 5 se usa la conjetura presentada en la sección de secuencias multiplicativas, a partir de polinomios de Bessel de segundo y tercer grado.

Finalmente se presenta en el ejemplo 6 una posible aplicación del uso de este tipo de operadores para el caso de adsorción-desorción de una partícula (sobre una función que constituye una aproximación físicamente consistente al modelo dinámico del proceso [12]).

5.2 Ilustración de resultados

Ejemplo 2 *De acuerdo con la proposición 3.5 de [4] el siguiente polinomio*

$$h(x) = (x + c)((x + a)^2 + b^2)$$

para valores positivos de a, b y c podrá utilizarse en la formación de una secuencia multiplicativa si y sólo sí su discriminante es positivo, lo cual es cierto para $a = 0.1, b = 0.2, c = 0.3$ con lo que consecuentemente se obtiene $\{h(k)\}_{k=0}^{\infty}$, entonces,

$$h(k) = k^3 + 0.5k^2 + 0.11k + 0.015.$$

Tomando el siguiente polinomio Hurwitz

$$p(s) = s^3 + 8s^2 + 5s + 1$$

se obtiene $L[p(s)]$ y se representa como SSPM. El polinomio Hurwitz es de 3^{er} grado, por lo que la secuencia que se forma es

$$\{h(k)\}_{k=0}^{3} = \{0.015, 1.625, 10.235, 31.845\}.$$

Ahora se procede a representarlo como un operador del tipo SSPM

$$[1581] \begin{bmatrix} .015 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.235 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 31.845 \end{bmatrix} = [.0158.12581.8831.845]$$

donde $p(s) = 0.015 + 8.125s + 81.88s^2 + 31.845s^3$ es un polinomio Hurwitz estable.

Ejemplo 3 *Utilizando una función real estrictamente positiva de grado relativo cero*

$$z(s) = \frac{s^2 + 4s + 1}{s^2 + s + 2},$$

función que consta de polinomios en numerador y denominador de segundo orden. Como en el ejemplo anterior se forma la secuencia multiplicativa no- negativa correspondiente

$$\{h(k)\}_{k=0}^{2} = \{0.015, 1.625, 10.235\}.$$

Se puede generar una nueva función racional mediante la aplicación de la secuencia multiplicativa en numerador y denominador (teorema de Talbot, [11]), como se ilustra a continuación:

$$Z'(s) = \frac{L[p(s)]_{num}}{L[p(s)]_{den}} = \frac{[1\ 4\ 1]\begin{bmatrix} .015 & 0 & 0 \\ 0 & 1.625 & 0 \\ 0 & 0 & 10.235 \end{bmatrix}}{[2\ 1\ 1]\begin{bmatrix} .015 & 0 & 0 \\ 0 & 1.625 & 0 \\ 0 & 0 & 10.235 \end{bmatrix}} = \frac{[0.015\ 6.5\ 10.235]}{[.03\ 1.625\ 10.235]}$$

$$Z'(s) = \frac{10.235s^2 + 6.5s + 0.015}{10.235s^2 + 1.625s + 0.03}$$

Se procede a verificar que esta nueva función de transferencia cumpla las condiciones necesarias para ser una SPR0:

1. *Las raíces del denominador son:* $-2.1326 * 10^{-2}$ *y* -0.13744. *Por lo que la función es analítica en* $\mathrm{Re}(s) \geq 0$.

2. $\mathrm{Re}\, Z'(iw) = \left(-w^2+1\right)\frac{-w^2+2}{\left(-w^2+2\right)^2+w^2} + 4\frac{w^2}{\left(-w^2+2\right)^2+w^2} = \frac{w^4+w^2+2}{w^4-3w^2+4}$ *queda satisfecha la condición* $\mathrm{Re}[Z'(iw)] > 0$ *para toda* $w \in \mathbb{R}$ *como se muestra en la figura 5-1. Se concluye que la función racional obtenida es SPR0.*

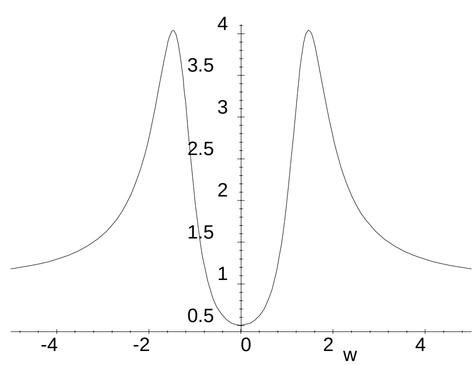

Figura 5-1: Respuesta en frecuencia de $Z'(s)$

Ejemplo 4 *Se comienza por obtener el polinomio de Bessel de segundo grado, de acuerdo con la definición 9, es decir:*

$$B(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x + 1$$

después, se busca un polinomio cuyas raíces sean reales y negativas para formar la secuencia multiplicativa,

$$h(x) = x^2 + 4x + 2$$

$h(0) = 2, h(1) = 7$ *y* $h(2) = 14$

$$\frac{3}{2}x^2 + 3x + 1 = h(2)a_2x^2 + h(1)a_1x + h(0)a_0$$

por prueba y error se obtienen los coeficientes a_k*, que en este caso son:* $a_0 = 1/2, a_1 = 3/7$ *y* $a_2 = 3/28$*, con los que se forma el siguiente polinomio estable:*

$$p(s) = \frac{3}{28}s^2 + \frac{3}{7}s + \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 5 *Utilizando un polinomio de Bessel de tercer grado:*

$$B(x) = 15x^3 + 15x^2 + 6x + 1$$

y el siguiente polinomio cuyas raíces son reales y negativas:

$$h(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$$

$h(0) = 1, h(1) = 5, h(2) = 17$ *y* $h(3) = 43$

$$15x^3 + 15x^2 + 6x + 1 = h(3)a_3x^3 + h(2)a_2x^2 + h(1)a_1x + h(0)a_0$$

por prueba y error se encuentran los coeficientes a_k*, que para este caso son:* $a_3 = 15/43, a_2 = 15/17, a_1 = 6/5$ *y* $a_0 = 1$*, con ellos se obtiene el siguiente polinomio estable:*

$$p(s) = \frac{15}{43}s^3 + \frac{15}{17}s^2 + \frac{6}{5}s + 1.$$

Ejemplo 6 *Adsorción en una partícula.*

Primero se muestra que el modelo matemático de este proceso satisface las condiciones que lo definen como una función real estrictamente positiva de grado relativo uno (SPR1). A continuación, se aplica una secuencia multiplicativa en numerador y denominador y se vuelven a verificar condiciones SPR1. Posteriormente se varían los coeficientes de la función y se procede a verificar condiciones SPR1 para mostrar preservación de pasividad. Finalmente a la función obtenida se le aplica el operador lineal (secuencia multiplicativa) en numerador y denominador y se verifican condiciones SPR1.

El modelo matemático que a continuación se utiliza, es una aproximación consistente con la física del modelo de adsorción-difusión de Fick (ver[12]).

$$q(s) = \frac{\frac{3}{5005}s^2 + \frac{4}{65}s + 1}{\frac{1}{135135}s^3 + \frac{2}{715}s^2 + \frac{5}{39}s + 1},$$

función que como se verá satisface las características de SPR0/SPR1

1. *Las raíces del denominador son:* -9.86993 ,-41.979298 *y* -326.150166. *Por lo que la función es analítica en* $\mathrm{Re}(s) \geq 0$.

2. $\mathrm{Re}[q(iw)] = 189\frac{118w^4+434115w^2+96621525}{108234w^4+197993565w^2+1\,82614\,68225+w^6}$

queda satisfecha la condición $\mathrm{Re}[q(iw)] > 0$ *para toda* $w \in \mathbb{R}$ *como se muestra en la figura 5-2. Se concluye que la función racional obtenida es SPR1.*

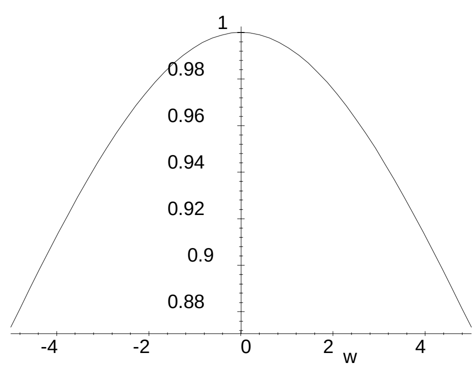

Figura 5-2: Respuesta en frecuencia de $q(s)$

A continuación se utiliza una secuencia multiplicativa no-trivial en numerador y denominador y se verifican condiciones SPR1.

La secuencia a utilizar será:

$$\{p(k)\}_{k=0}^{\infty} = k^3 + 0.5k^2 + 0.11k + 0.015.$$

Haciendo la multiplicación término a término en numerador y denominador:

$$p(s) = \frac{\frac{30.705}{5005}s^2 + \frac{6.5}{65}s + .015}{\frac{31.845}{135135}s^3 + \frac{20.47}{715}s^2 + \frac{8.125}{39}s + .015}.$$

Verificando a continuación condiciones SPR:

1. *Las raíces del denominador son:* $-7.272652 * 10^{-2}$, -7.67639095 *y* -113.720248. *Con lo que se muestra que la función es analítica en* $\mathrm{Re}(s) \geq 0$.

2. $\mathrm{Re}[p(iw)] = 40.0\frac{1.5207\times10^9 w^4 + 2.0312\times10^{11}w^2 + 2.25\times10^9}{2.8857\times10^{11}w^4 + 1.7017\times10^{13}w^2 + 9.0\times10^{10} + 2.2212\times10^7 w^6}$

con esto queda satisfecha la condición de que $\mathrm{Re}[p(iw)] > 0$ *para toda* $w \in \mathbb{R}$ *como se muestra en la siguiente figura 5-3 y se concluye que la función sigue siendo SPR1.*

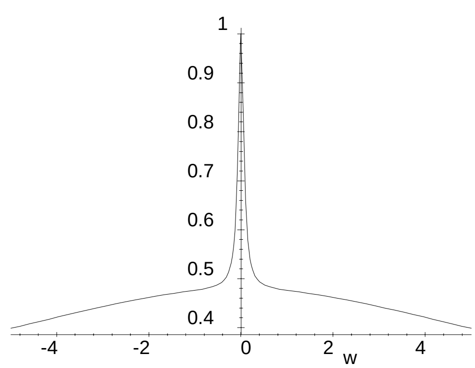

Figura 5-3: Respuesta en frecuencia de $p(s)$

Para preservación de pasividad se varían los coeficientes de la función en 0.00001 y se verifica que la función siga siendo una SPR1, para posteriormente utilizar la secuencia multiplicativa; el resultado de este proceso es la siguiente función de transferencia:

$$c(s) = \frac{.0006094005s^2 + .06154846s + 1.00001}{.000017400s^3 + .00280720279s^2 + .128215128s + 1.00001}$$

1. *Las raíces del denominador son:* $-9.758223, 0$, $-75.7876, 12.07$ *y* $-75.7876, -12.07$. *Por lo que la función es analítica en* $\mathrm{Re}(s) \geq 0$.

2. $\mathrm{Re}[c(iw)] = 8.0\frac{1.9993\times10^{6}w^{4}+1.3985\times10^{10}w^{2}+3.125\times10^{12}}{8.5458\times10^{7}w^{4}+2.7065\times10^{11}w^{2}+2.5\times10^{13}+7569.0w^{6}}$.

con esto queda satisfecha la condición de que $\mathrm{Re}[c(iw)] > 0$ *para toda* $w \in \mathbb{R}$ *como se muestra en la siguiente figura 5-4 y se afirma nuevamente que la función es SPR1.*

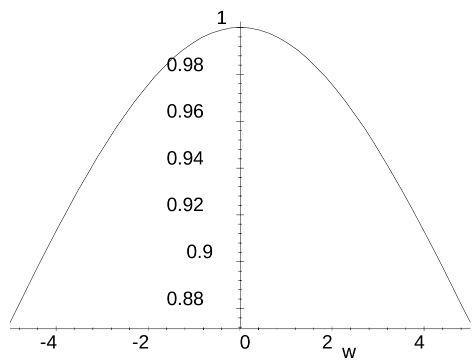

Figura 5-4: Respuesta en frecuencia de $c(s)$.

Ahora aplicando la secuencia multiplicativa en numerador y denominador defino la siguiente función de transferencia:

$$j(s) = \frac{.0062372141s^2 + .1000162475s + .01500015}{.000554103s^3 + .0287317205s^2 + .208349583s + .01500015}$$

1. *Los polos son:* -0.072723400331 , -8.62602335562 *y* -43.1539241374. *Por lo que la función es analítica en* $\mathrm{Re}(s) \geq 0$.

2. $\mathrm{Re}[j(iw)] = 40.0\frac{3.0947\times10^{8}w^{4}+5.0787\times10^{10}w^{2}+5.625\times10^{8}}{5.9463\times10^{10}w^{4}+4.2548\times10^{12}w^{2}+2.25\times10^{10}+3.0703\times10^{7}w^{6}}$.

con esto queda satisfecha la condición de que $\mathrm{Re}[j(iw)] > 0$ *para toda* $w \in \mathbb{R}$ *como se muestra en la siguiente figura 5-5*

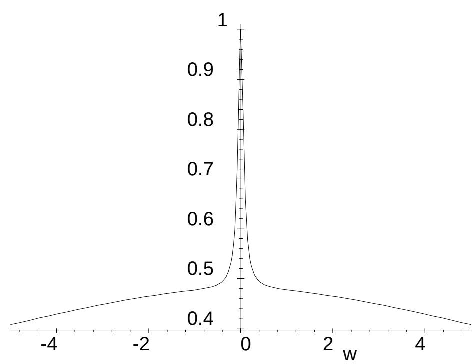

Figura 5-5: Respuesta en frecuencia de $j(s)$

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se han revisado aspectos relativos a la preservación de propiedades de sistemas lineales estacionarios, ante la presencia de cierta clase de incertidumbre modelada a través de operadores algebraicos. El estudio se basó en el análisis de lo publicado en tres artículos que comparten un enfoque particular (descripción del sistema en Términos de entrada-salida, restricción a sistemas SISO, utilización de sustituciones algebraicas, priorización del estudio de la estabilidad y de la robustez), estableciendo las interrelaciones entre los resultados publicados y extendiendo algunos, como contribuciones de este trabajo a la teoría matemática que fundamenta a la teoría de control.

Se han desarrollado nuevos métodos para generar operadores lineales del tipo SSPM y familias de los mismos. Estos resultados amplían el estudio y entendimiento de la teoría de matrices que (representando operadores algebraicos lineales) mapean preservando la estabilidad del sistema. Una posible aplicación de estos resultados se encuentra en la teoría de control robusto.

Se generalizó el teorema de Talbot al preservar la propiedad SPR0, utilizando diferentes operadores lineales en numerador y denominador.

En la teoría de la distribución de ceros de polinomios, se mostró la utilidad de como por medio del uso de secuencias multiplicativas un polinomio estable puede ser mapeado en polinomios estables de Bessel. El proceso de mapeo puede ser representado en términos de un operador lineal del tipo SSPM.

Como perspectivas posibles de lo aquí presentado se puede estudiar:

- la factibilidad de que este enfoque pueda extenderse al caso de operadores no-lineales o de otro tipo;
- la posibilidad de extender resultados clásicos sobre estabilidad robusta a operadores del tipo SSPM;
- lo relativo a la preservación de propiedades de pasividad en plantas sometidas a la acción de operadores del tipo SSPM (como medios para el modelado de la incertidumbre).

Bibliografía

[1] S.P. Battacharyya, H. Chapellat and L.H. Keel . *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice Hall, New York, 1995.

[2] T. Craven and G. Csordas, "The Gauss-Lucas theorem and Jensen polynomials", Trans. Amer. Math. Soc. 278 (1983) 415-429.

[3] T. Craven and G. Csordas, "Complex zero decreasing sequences". Methods Appl. Anal. 2 (1995) 420-441.

[4] T. Craven and G. Csordas, "Problems and theorems in the theory of multiplier sequences", Serdica Math.J. 22 (1996) 515-524.

[5] G. Csordas, Marios Charalambides and Fabian Waleffe, "A new property of a class of Jacobi polynomials". *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol.

[6] T. Djaferis, "Stability preserving maps and Robust design". *International Journal of Control*, 75 (2002) 680-690.

[7] G. Fernandez, "Stability properties of the Hadamard product of interval polynomials and SPR functions". *Journal of the Franklin institute*, 336 (1999) 749-754.

[8] G.Fernandez, "Preservation of SPR functions and Stabilization by substitutions in SISO plants". *IEEE Transactions on automatic control*, 44 (1999) 2171-2174.

[9] F.R. Gantmacher. "*The theory of matrices*".Interscience Publisher, Inc., New York.

[10] J.Garloff and D.Wagner,"Hadamard Products of Stable Polynomials are Stable". *Journal of mathematical analysis and applications*, 202 (1996) 797-809.

[11] A.Talbot, "Transformation of Positive Functions by Linear Operators". *IEEE Transactions on circuit theory*, 19 (1972) 460-465.

[12] J. Alvarez, G. Fernandez, F. Valdes and A. Ochoa,"Physical Consistency of Generalized Linear Driven Force Models for Adsorption in a Particle". Aprobado para ser publicado en *Industrial and Engineering Chemistry Research.*

[13] V.L. Kharitonov, "Asymptotic stability of families of systems of linear differential equations", *Differents Uravn 14*, 11(1978), 2086-2088.

[14] Polyak and Ya. Z. Tsypkin, "Stability and Robust stability of Uniform Systems". *Automation and Remote Control*, 57 (1996) 1606-1617.

[15] J. Doyle, B. Francis and A. Tannenbaum. *Feedback Control Theory*, Mcmillan publishing Co., 1992.

Apéndice A

Antecedentes de Control

Para cualquier tipo de análisis de sistemas de control, es importante establecer ciertos conceptos básicos.

Sistemas de control retroalimentados Un sistema que mantiene una relación prescrita entre la salida y la entrada de referencia, comparándolas y usando la diferencia como medio de control, se denomina sistema de control retroalimentado.

Función de transferencia: Es una función que relaciona algebraicamente la salida de un sistema lineal estacionario a la entrada del mismo. Esta función permite separar la entrada, el sistema y la salida en 3 partes separadas y distintas a diferencia de la ecuación diferencial. Esta función a su vez, permite combinar matemáticamente representaciones de subsistemas para alcanzar la representación total de un sistema.

Representación de un sistema en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo:

Dependiendo del sistema de que se trate y de las circunstancias específicas, un modelo matemático puede ser más conveniente que otro. Por ejemplo, en problemas de control óptimo, es mas útil usar representaciones en el espacio de estados. En cambio, para los análisis de respuesta transitoria o de la respuesta en frecuencia de sistemas lineales con una entrada y una salida invariantes en el tiempo, la representación mediante funciones de transferencia puede ser más conveniente que cualquier otra.

Para el análisis y el diseño de sistemas de control por retroalimentación, hay dos técnicas disponibles:

1) Técnica en el dominio de la frecuencia (clásica)

Esta técnica se basa en convertir la ecuación diferencial que describe al sistema, a una función de transferencia, generandose así un modelo matemático del sistema que relaciona algebraicamente la representación de la salida a la representación de la entrada. Reemplazar la ecuación diferencial por una ecuación algebraica no solo simplifica la representación de subsistemas individuales, sino que también simplifica el modelamiento de subsistemas interconectados. La desventaja de esta técnica es que solo se puede aplicar a sistemas lineales invariantes en el tiempo o sistemas que puedan aproximarse a estos.

Una ventaja de la técnica en el dominio de la frecuencia es que nuestra intuición mejora por medio de herramientas matemáticas que rápidamente dan información sobre estabilidad y respuesta transitoria, así podemos ver rápidamente el efecto que tendría sobre el sistema variar sus parámetros hasta alcanzar un diseño aceptable.

2) Técnica en el dominio del tiempo

Conocido también como método de espacio de estados, es un método unificado de modelado, análisis y diseño para una amplia gama de sistemas; por ejemplo se puede utilizar para representar sistemas no lineales.

La técnica de dominio del tiempo permite que el sistema sea simulado informáticamente. Este método se utiliza en optimización.

Sistemas lineales invariantes en el tiempo LTI: Una ecuación diferencial es lineal si sus coeficientes son constantes o son funciones solo de la variable independiente. Los sistemas dinámicos formados por componentes de parámetros lineales invariantes en el tiempo se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo (de coeficientes constantes) . Tales sistemas se denominan " Sistemas lineales invariantes con el tiempo " (lineales de coeficientes constantes).

Los sistemas que se representan por medio de ecuaciones diferenciales cuyos coeficientes son funciones del tiempo, se denomina lineales variantes con el tiempo. Un ejemplo de un sistema de control variante con el tiempo es un sistema de control de naves espaciales.

Estabilidad De las características mas importantes del comportamiento dinámico de un sistema de control es la estabilidad, ya que no se puede diseñar un sistema inestable para un requerimiento especifico de respuesta transitoria ó de error en estado estable.

La respuesta total de un sistema es la suma de su respuesta natural mas su respuesta forzada.

Un sistema LTI es estable si su respuesta natural se aproxima a cero mientras el tiempo tiende a infinito. Por lo que un sistema de este tipo será inestable si su respuesta natural excede cierta magnitud o crece sin cota mientras el tiempo tiende a infinito. El sistema será marginalmente estable si su respuesta natural ni crece ni decrece, se mantiene constante u oscila mientras el tiempo tiende a infinito.

Tener polos en el semiplano complejo izquierdo generan un decaimiento exponencial o respuestas naturales senoidales amortiguadas. Sistemas inestables tienen funciones de transferencia con por lo menos un polo en el semiplano complejo derecho y/o polos con multiplicidad mayor a uno en el eje imaginario; polos con multiplicidad mayor a uno llevan a sumas de respuestas del tipo $At^n \cos(\omega t + \phi)$ donde $n = 1, 2, ...$ que también tiende a infinito cuando el tiempo tiende a infinito.

Sistemas marginalmente estables cuentan con funciones de transferencia cuyos polos pueden estar en el eje imaginario y de multiplicidad uno y/o caer en el semiplano complejo izquierdo.

Por lo anterior podemos concluir que sistemas estables tienen funciones de transferencia a lazo cerrado con polos en el semiplano complejo izquierdo.

Graficas de Mikhailov En 1938, Mikhailov propuso un criterio de estabilidad que puede ser formulado de la siguiente manera:

Un polinomio de la forma $p(s) = p_0 + p_1 s + ... + p_n s^n$ donde $p_n > 0$ es estable si su gráfica de frecuencia $p(j\omega)$:

- Empieza en el eje real positivo.
- Encircula en contra de las manecillas del reloj el origen con un incremento de fase de $\frac{n\pi}{2}$ conforme ω va de 0 a $+\infty$.

Criterio de estabilidad de Niquist: El criterio de Niquist relaciona la estabilidad de un sistema a lazo-cerrado con la respuesta a la frecuencia a lazo-abierto y la localización de polos a lazo-abierto. Es decir, tener información sobre la respuesta a la frecuencia a lazo-abierto nos proporciona información acerca de la estabilidad del sistema a lazo-cerrado. Para entender correctamente el criterio de estabilidad de Nyquist es muy importante tener muy claros los siguientes puntos:

1. La relación que existe entre los polos de la ecuación característica $1 + G(s)H(s)$ y los polos de la ecuación para lazo abierto $G(s)H(s)$.
2. La relación que existe entre los ceros de la ecuación característica $1+G(s)H(s)$ y los polos a lazo cerrado de la función de transferencia $T(s) = \frac{G((s)}{1+G(s)H(s)}$.
3. El concepto de mapeo de puntos.
4. El concepto de mapeo de contornos; Mapear un contorno A, a través de una función F(s) en un contorno B.

Para el mapeo de contornos es importante notar que si se asume el mapeo en favor de las manecillas del reloj para mapear los puntos del contorno A (plano-s), entonces el mapeo del contorno B mapea también a favor de las manecillas del reloj si la función F(s) tiene solo ceros, y en contra de las manecillas del reloj si la función F(s) tiene solamente polos. También que si el polo o cero de la función F(s) es encirculado por el contorno A, el mapeo encirculará el origen. Se puede dar el caso en el que un polo y un cero de F(s) estén dentro del contorno A y se cancelen , por lo que el mapeo no encirculará el origen.

Este criterio plantea que existe una relación única entre el número de polos de F(s) contenidos dentro del contorno A, el número de ceros de F(s) dentro del contorno A y el número de encierros del origen en contra de las manecillas del reloj durante el mapeo del contorno B. Esta relación se puede usar para determinar la estabilidad de un sistema a lazo cerrado.

” Si el contorno A, que encircula completamente el semiplano complejo derecho es mapeado a través de $G(s)H(s)$, entonces el número de polos a lazo cerrado, Z, en el semiplano complejo derecho, iguala el número de polos a lazo abierto, P, que están en el semiplano complejo derecho menos el número de encirculmientos en contra de las manecillas del reloj, N, alrededor de -1 en el mapeo; esto es $Z = P - N$. El mapeo se conoce como diagrama de Nyquist de $G(s)H(s)$”.

Perturbación Una perturbación es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema.

Incertidumbre: Dado que no podemos predecir exactamente cual será la salida de un sistema físico aún conociendo la entrada, pues al modelar sistemas dinámicos normalmente se tienen que ignorar ciertas no linealidades. Si el efecto que estas propiedades ignoradas tienen sobre la respuesta son pequeños se obtendrá un buen acuerdo entre los resultados del análisis de un modelo matemático y los resultados del estudio experimental del sistema físico. A todo esto se le conoce como incertidumbre. La incertidumbre proviene de dos fuentes;

Entradas desconocidas o impredecibles (ruido, perturbaciones etc)

Dinámicas impredecibles.

Control simultaneo: El control simultaneo se refiere al diseño de un controlador que controla a varias plantas de diferentes ordenes simultáneamente.

Control Robusto: El control robusto se refiere al diseño de un controlador que controla familias de plantas con variación de parámetros; sin modificar el orden de la planta. Es decir, un sistema es robusto si el análisis de estabilidad a partir del modelo nominal se conserva en el sistema real a pesar de las inexactitudes del modelo y de la influencia de perturbaciones.

Factorización coprima

Siendo $p(s)$ una función de transferencia cuyo numerador y denominador son dos polinomios coprimos:

$$p(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

Por medio del algoritmo de Euclides, es posible obtener otros dos polinomios x , y que satisfagan la siguiente ecuación:

$$n(s)x(s) + d(s)y(s) = 1$$

Si consideramos $n(s)x(s)+d(s)y(s)$ como el polinomio característico y a sabiendas que el sistema es internamente estable si este polinomio no tiene ceros en el semiplano complejo derecho, entonces podremos definir al controlador de la siguiente manera:

$$c(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$$

ya que el polinomio característico de un sistema retroalimentado tiene la forma : $n_p(s)n_c(s) + d_p(s)d_c(s)$, (numerador por numerador y denominador por denominador). Como se puede ver, nos enfrentamos con la situación de que y podría ser cero, o aún cuando y no sea cero se tiene el caso de que $c(s)$ no sea una función racional propia. Para evitar estos posibles problemas ponemos la restricción de que $n(s), x(s), d(s), y(s)$ sean elementos de la familia de todas las funciones reales, racionales, estables y propias en lugar de polinomios. Dos funciones n y d en $\mathbb{R}H^\infty$ son coprimas si existen otras dos funciones x, y también pertenecientes a $\mathbb{R}H^\infty$ que satisfagan la ecuación:

$$n(s)x(s) + d(s)y(s) = 1.$$

Es importante notar que para que esta ecuación se cumpla n y m no pueden tener ceros comunes en el semiplano complejo derecho ni en ∞. A esto se le conoce como factorización coprima de $p(s)$ sobre $\mathbb{R}H^\infty$.

Resumiendo podemos establecer lo siguiente: Sea $p(s) \in \mathbb{R}H^\infty$ con $p(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ si $n(s), d(s) \in \mathbb{R}H^\infty$ y se cumple la siguiente identidad: $n(s)q_1(s) + d(s)q_2(s) = 1$ donde $q_1(s), q_2(s) \in \mathbb{R}H^\infty$, entonces $(n(s), d(s))$ es una factorización coprima de $p(s)$.