

**UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA**

ESTUDIOS CON RECONOCIMIENTO DE VALIDEZ POR  
DECRETO PRESIDENCIAL DEL 3 DE ABRIL DE 1981



**DISEÑO EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS PARA  
COMPARAR LA TENACIDAD DE  
DIFERENTES TIPOS DE CONCRETO**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
**MAESTRO EN INGENIERÍA DE CALIDAD**

P R E S E N T A

**JOSÉ FERNANDO PÉREZ GODÍNEZ**

México, D. F.

2004.



## **DEDICATORIA**

Dedico este trabajo a la memoria de mi padre: Ing. Fernando Pérez Sánchez.

A mi mamá, por el gran amor que es capaz de entregar a toda su familia.

A mis hermanos, por su apoyo incondicional y su cariño.

A mi esposa Juanita, por su amor y su comprensión.

A mis hijas Fernanda Giovanna y Karla Xihomara, por su gran amor y paciencia. Sé que han padecido una ausencia parcial de mi parte para que esta etapa de mi desarrollo profesional haya concluido. ¡Gracias, mis pequeñas!, son el más puro amor que he experimentado.

## **AGRADECIMIENTOS**

Deseo agradecer a todos mis maestros por haberme guiado pacientemente a lo largo de los estudios de esta maestría.

Al Dr. Primitivo Reyes Aguilar, por su atenta revisión de este trabajo.

A la Dra. Teresa López Álvarez, por sus comentarios y sugerencias.

Al Mtro. Alfonso Morales Ibarra, por su guía y amistad durante toda mi vida académica.

Al M. en C. Eduardo Arias Báez, por su incondicional apoyo y consejo. ¡Gracias por brindarme tu amistad!

A Judith y a Lucy, por su amistad y su eficaz trabajo de apoyo a la maestría.

A los valiosos comentarios y aportaciones del Dr. Alberto Ruiz Treviño y del M. I. Uriel Texcalpa Villarruel.



# C O N T E N I D O

<b><u>INTRODUCCIÓN.</u></b>	<b><u>1</u></b>
ANTECEDENTES.	1
JUSTIFICACIÓN.	3
OBJETIVO GENERAL.	3
OBJETIVOS ESPECÍFICOS.	4
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.	4
PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN.	5
HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN.	5
ALCANCE.	5
Referencias de la introducción.	6
<b><u>CAPÍTULO 1: EL CEMENTO PÓRTLAND.</u></b>	<b><u>7</u></b>
Un poco de historia.	7
Fabricación del Cemento Pórtland.	9
Hidratación del cemento.	13
Fraguado.	15
Estructura del cemento hidratado.	17
Resistencia mecánica del gel de cemento.	18
Agua contenida en la pasta de cemento hidratado.	20
Calor de hidratación del cemento.	23
Tipos de Cemento Pórtland.	25
Cemento Pórtland Ordinario.	26
Cemento Pórtland de endurecimiento rápido.	26
Cementos Pórtland especiales de endurecimiento rápido.	27
Cemento Pórtland de bajo calor.	29
Cemento resistente a sulfatos	29
Cemento Pórtland de escoria de alto horno.	30
Cemento sobresulfatado.	32
Cementos Pórtland – puzolánico y puzolanas.	34
Cemento blanco.	35
Otros cementos Pórtland.	37
Cementos naturales.	38
Cementos expansivos.	38
Cemento aluminoso.	40
Referencias de este capítulo.	41

## **CAPÍTULO 2: LOS POLÍMEROS.** **43**

Tipos de polímeros.	46
Estructuras y propiedades físicas de los polímeros.	48
Enlaces cruzados en los polímeros.	50
Reciclaje de plásticos.	52
Referencias de este capítulo.	56

## **CAPÍTULO 3: EL CONCRETO ELABORADO CON CEMENTO PÓRTLAND.** **57**

Requisitos para intemperismo.	70
Requisitos de colocación.	71
Procedimiento para el proporcionamiento.	73
Referencias de este capítulo.	77

## **CAPÍTULO 4: EL CONCRETO ELABORADO CON POLÍMEROS.** **79**

Referencias de este capítulo.	85
-------------------------------	----

## **CAPÍTULO 5: MÉTODOS DE REGRESIÓN.** **87**

UN POCO DE HISTORIA.	87
DEFINICIÓN Y OBJETIVOS DEL ANÁLISIS DE REGRESIÓN.	92
ANÁLISIS DE REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE.	93
MÉTODOS DE ESTIMACIÓN PUNTUAL.	94
ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO DE REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE POR EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS.	100
PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES MÍNIMO – CUADRÁTICOS.	103
ESTIMACIÓN DE $\sigma^2$ .	105
MODELOS DE REGRESIÓN NO LINEALES.	106
Referencias de este capítulo.	110

## **CAPÍTULO 6: DISEÑO DEL EXPERIMENTO Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.** **111**

ALGO DE HISTORIA.	111
PRINCIPIOS BÁSICOS DEL DISEÑO EXPERIMENTAL.	113
PAUTAS GENERALES PARA DISEÑAR EXPERIMENTOS.	115
RECOMENDACIONES PARA EL EXPERIMENTADOR.	120

<b>DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO EXPERIMENTAL</b>	<b>121</b>
<b>ANÁLISIS DE REGRESIÓN PARA LOS DATOS.</b>	<b>129</b>
<b>ELECCIÓN DEL MODELO.</b>	<b>129</b>
<b>DETALLES DEL MODELO ELEGIDO.</b>	<b>130</b>
<b>ANÁLISIS DE VARIANZA PARA ESTOS MODELOS DE REGRESIÓN.</b>	<b>131</b>
<b>ANÁLISIS DE ADECUACIÓN DEL MODELO.</b>	<b>140</b>
<b>EVALUACIÓN DE LAS TENACIDADES.</b>	<b>144</b>
<b>INTERVALOS DE CONFIANZA PARA LOS MODELOS DE REGRESIÓN.</b>	<b>148</b>
<b>ANÁLISIS DE RESIDUALES.</b>	<b>154</b>
<b>COMPARACIÓN DE TENACIDADES.</b>	<b>156</b>
<b>Análisis de Varianza.</b>	<b>156</b>
<b>Prueba de Tukey.</b>	<b>157</b>
<b>Prueba de Fisher (método de la diferencia significativa mínima).</b>	<b>159</b>
<b>Referencias de este capítulo.</b>	<b>161</b>
<b><u>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.</u></b>	<b><u>163</u></b>

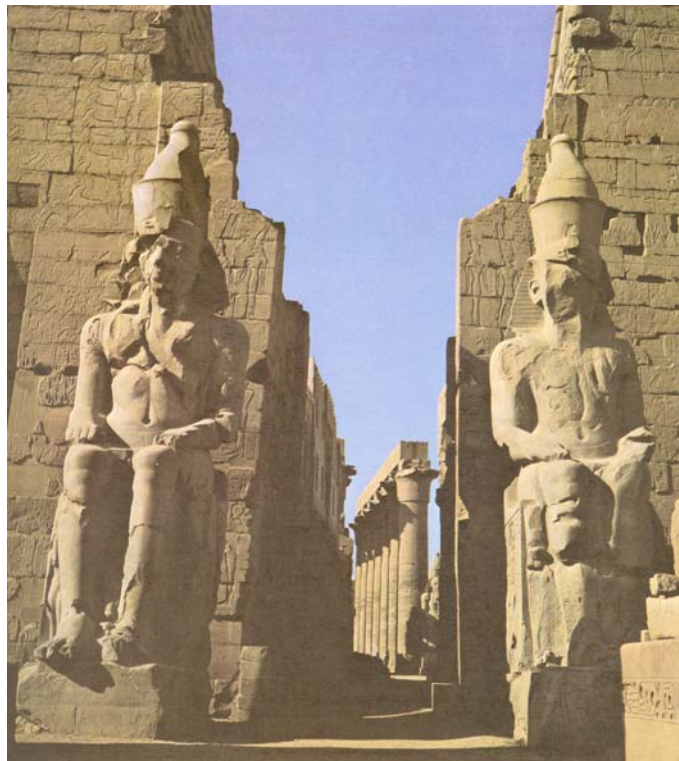
# INTRODUCCIÓN.

## ANTECEDENTES.

La tenacidad se define como la energía de deformación que es capaz de absorber una unidad de volumen de cierto material hasta que falla. Se puede calcular como el área bajo la curva Esfuerzo (E) – Deformación (D).

El concreto es un material compuesto por un agregado fino, uno grueso y un aglutinante líquido que reacciona con los agregados, de esta manera se obtiene un material sólido de alta resistencia a la compresión, gran durabilidad, baja resistencia a la tensión y de falla frágil.<sup>1</sup>

Se han encontrado columnas de cierto tipo de concreto en Egipto, que tienen más de 3 600 años, lo cual evidencia la durabilidad de este material.



Columnas egipcias antiguas <sup>2</sup>



El aglutinante líquido tarda en reaccionar cierto tiempo, lo cual permite que el concreto sea fácilmente moldeable y se le puedan agregar otros materiales (como las varillas de acero) para mejorar sus propiedades físicas.

Todas las estructuras de concreto armado tienen un volumen de acero mucho más pequeño que el del concreto, así que cuando estas estructuras se ven sometidas a grandes esfuerzos (como los provocados por un sismo) la mayor parte de la energía transmitida a la estructura es absorbida por el concreto.

A lo largo de la historia, dependiendo de su uso, se han probado muchos tipos de componentes, por ejemplo: como agregados gruesos, gravas de diferentes tamaños, rocas ígneas, tezontle o escorias; como agregados finos, principalmente arena u otro tipo de material de propiedades similares; como elemento aglutinante, polvo fino de yeso mezclado con agua, cementos elaborados con diferentes sustancias, cementos que reciben su nombre por su origen, como el cemento Romano, cementos que reciben su nombre por el parecido con otros materiales, como el cemento Pórtland (que es el más usado en la actualidad) y, últimamente, se han empezado a probar los polímeros como elemento aglutinante.

Del cemento Pórtland hablaremos en el Capítulo 1 y de los polímeros en el Capítulo 2. Por ahora, sólo diremos que el cemento Pórtland está elaborado a partir de piedras calizas, arcillas pizarras o escorias de altos hornos, en diferentes proporciones. Y de los polímeros, que son plásticos que pueden ser elaborados de diferentes formas. En este trabajo hablaremos de un polímero hecho especialmente para ser el material aglutinante del concreto y de otro polímero que se obtiene a partir del reciclaje químico de botellas para refresco hechas de un plástico llamado polietileno tereftalato (PET).

Cuando nos refiramos al concreto elaborado con un polímero hecho para este fin (Por ejemplo el de Reichhold), diremos simplemente: CONCRETO POLIMÉRICO (CP) y cuando hablemos de un concreto elaborado con el polímero obtenido por reciclaje químico, diremos: CONCRETO POLIMÉRICO PET (CP-PET).

## **JUSTIFICACIÓN.**

La búsqueda de nuevos materiales, forma parte de un proceso de mejora continua de la calidad en los productos elaborados con tales materiales.

Se dice que lo bueno es el peor enemigo de lo mejor, y el concreto elaborado con cemento Pórtland ha demostrado ser un excelente material en la industria de la construcción, sin embargo, la investigación en el área de materiales modernos ha permitido que se superen muchas de las propiedades de los concretos elaborados con este popular material, sustituyéndolo con polímeros.

En este momento, los Concretos Poliméricos sólo se usan en pequeña escala y en limitadas aplicaciones en las que el beneficio de sus propiedades físicas supera su elevado costo con respecto al Concreto elaborado con Cemento Pórtland (de cinco a seis veces más caro).

En este trabajo, se pretende motivar el uso del Concreto Polimérico elaborado con polímeros obtenidos del reciclaje de envases de PET, en la industria de la construcción, no sólo para mejorar la calidad de las estructuras, sino para atacar parte de un importante problema de desechos sólidos.

Los desechos sólidos, desde los orgánicos hasta los radiactivos, se han convertido en un grave problema ecológico, más acentuado en zonas de alta densidad de población; así que el uso masivo de los desechos de PET, para elaborar polímeros en la industria de la construcción, puede contribuir a resolver una pequeña parte de este gravísimo problema.

## **OBJETIVO GENERAL.**

Justificar la posibilidad del uso de Concreto Polimérico, elaborado con polímeros obtenidos del reciclaje de envases de PET, en la industria de la construcción, a través de la evaluación de la tenacidad entre los diferentes tipos de concretos.

**OBJETIVOS ESPECÍFICOS.**

1. Diseñar un experimento adecuado para evaluar las tenacidades de tres tipos de concreto:
  - a. Elaborado con Cemento Pórtland (CC).
  - b. Elaborado con polímeros especiales para este fin (CP).
  - c. Elaborado con polímeros obtenidos del reciclado de envases de polietilentereftalato (CP-PET).

Este diseño debe satisfacer las siguientes condiciones: todos los especímenes deben elaborarse con las mismas proporciones de sus componentes, deben elaborarse con los mismos procedimientos (en la medida de lo posible), deben usarse los mismos agregados finos y gruesos, y tener igual forma y volumen.

2. Realizar el experimento y capturar toda la información necesaria.
3. Analizar la información obtenida en el experimento.
4. Estimar las curvas esfuerzo-deformación mediante un análisis de regresión.
5. Calcular la tenacidad para cada uno de los tres tipos de concreto, mediante la integración de las curvas esfuerzo-deformación.
6. Analizar los resultados y establecer conclusiones.

**PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.**

Las estructuras de concreto funcionan bastante bien, pero es posible mejorar su desempeño usando materiales modernos. El problema consiste en que el alto costo de los concretos poliméricos hace prácticamente imposible su uso en grandes volúmenes. Este costo podría disminuir si se elaboran los polímeros a partir del reciclado de envases de polietilentereftalato para refrescos. Por supuesto que este uso para las botellas de refresco resolvería el problema de su desecho. Otro problema consiste en saber si el concreto elaborado con el

polímero obtenido del reciclado de envases tiene la tenacidad suficiente para su uso en estructuras de gran volumen.

### **PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN.**

¿La tenacidad del concreto polimérico elaborado con un polímero obtenido del reciclado de envases de PET es suficiente para poder usar este tipo de concreto en la industria de la construcción a nivel masivo?

¿Es posible resolver parte del problema de desechos sólidos reciclando envases de PET para elaborar concretos poliméricos?

### **HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN.**

La tenacidad del Concreto Polimérico elaborado con polímeros obtenidos del reciclado de envases de PET no presenta diferencias significativas con respecto a la tenacidad del Concreto Polimérico elaborado con polímeros especiales para este fin.

La tenacidad de cualquiera de los Concretos Poliméricos supera la tenacidad del Concreto elaborado con Cemento Pórtland.

La relación beneficio–costo para los concretos poliméricos elaborados con polímeros obtenidos del reciclado de envases de PET, puede permitir su uso en la industria de la construcción, si el gobierno federal está realmente interesado en resolver el problema de desechos de envases de PET.

### **ALCANCE.**

El análisis comparativo sólo se hará con las tenacidades. La comparación de calores de reacción de los diferentes concretos se omitirá, ya que aún no se conocen estos datos en concretos poliméricos (tema de una investigación posterior). Es importante este comentario, porque un calor de reacción muy grande e incontrolable podría acotar el uso del concreto polimérico a pequeños volúmenes.

Se entrará en materia, con los dos primeros capítulos, que hablan de las características del cemento Pórtland (Capítulo 1) y de los Polímeros (Capítulo 2).

**Referencias de la introducción.**

1. Enciclopedia Encarta. Microsoft.
2. Antiguas Civilizaciones. Tomo 4. U. T. E. H. A.

# CAPÍTULO 1: EL CEMENTO PÓRTLAND.

El cemento puede describirse como un material con propiedades tanto adhesivas como cohesivas, las cuales le dan la capacidad de aglutinar fragmentos minerales para formar un todo compacto.

En construcción, el significado del término cemento se restringe a materiales aglutinantes utilizados con piedras, arena, ladrillos, bloques de construcción, etc. Los principales componentes de este tipo de cemento son compuestos de cal, de modo que en construcción e ingeniería civil se trabaja con cementos calcáreos. Los cementos que se utilizan en la fabricación de concreto tienen la propiedad de fraguar y endurecer con el agua, en virtud de que experimentan una reacción química con ella y, por lo tanto, se denominan cementos hidráulicos.

Los cementos hidráulicos están compuestos principalmente por silicatos y aluminatos de cal y pueden clasificarse, en general, como cementos naturales, cementos Pórtland y cementos aluminosos. En este capítulo sólo hablaremos de la estructura y propiedades de los cementos Pórtland.

## **Un poco de historia.**

El uso de materiales de cementación es muy antiguo. Los egipcios ya utilizaban yeso calcinado impuro. Los griegos y romanos empleaban caliza calcinada y, posteriormente, aprendieron a mezclar cal con agua, arena y piedra triturada o ladrillo y tejas quebradas. Este es el primer concreto de la historia. Un mortero de cal no endurece con el agua y, para la construcción con agua, los romanos mezclaban cal con ceniza volcánica o con tejas de arcilla quemada, finamente trituradas. La sílice activa y la alúmina que se encuentran en las cenizas y en las tejas se combinaban con la cal para producir lo que fue conocido como cemento puzolánico, proveniente del nombre del pueblo de Puzzuoli, cerca del Vesubio, donde se encontraron por primera vez esas cenizas volcánicas. El nombre de cemento

puzolánico se utiliza hasta nuestros días para describir cementos obtenidos simplemente de moler materiales naturales a temperatura normal. Algunas de las estructuras en las cuales la mampostería se unía con morteros, tales como el Coliseo de Roma o el “Pont du Gard”, cerca de Nimes, han sobrevivido hasta esta época, con su material de cementación aún duro y firme. En las ruinas de Pompeya, a menudo el mortero se encuentra menos dañado por la intemperie que la piedra más bien blanda.

En la Edad Media hubo una disminución general en la calidad y el uso del cemento, y solamente en el siglo XVIII se encuentra un adelanto en el conocimiento de los cementos. En 1756, John Smeaton fue comisionado para reconstruir el faro de Eddyston, en la costa de Cornwall, y encontró que el mejor mortero se obtenía cuando se mezclaba “puzolana” con caliza que contenía una alta cantidad de material arcilloso. Al reconocer el papel de la arcilla, que hasta entonces se consideraba indeseable, Smeaton fue el primero en conocer las propiedades químicas de la cal hidráulica.

A partir de esto, se desarrollaron otros tipos de cementos hidráulicos, como el “cemento romano” que obtuvo Joseph Parker por calcinación de nódulos de caliza arcillosa, que vinieron a culminar en la patente del “Cemento Pórtland”, efectuada en 1824 por Joseph Aspdin, un constructor de Leeds<sup>1</sup>. Este cemento se preparaba calentando una mezcla de arcilla finamente triturada y caliza dura en un horno, hasta eliminar el CO<sub>2</sub>; esta temperatura era mucho más baja que la necesaria para la formación de Clinker. El prototipo del cemento moderno fue obtenido en 1845 por Isaac Johnson, quien quemó una mezcla de arcilla y caliza hasta la formación de Clinker, con lo cual se produjo la reacción necesaria para la formación de un compuesto “fuertemente cementoso”.

El nombre de cemento Pórtland, concebido originalmente debido a la semejanza de color y calidad entre el cemento fraguado y la piedra de Portland (una caliza obtenida en una cantera de Dorset) se ha conservado hasta nuestros días para describir un cemento obtenido de la mezcla minuciosa de materiales calcáreos y arcillosos u otros materiales que contengan sílice, alúmina u óxidos de fierro, quemándolos a una temperatura de formación de clinkers y pulverizando el Clinker resultante. Esta es la definición actual de Cemento

Pórtland, la cual estipula también que ningún otro material, fuera del yeso y el agua, puede ser adicionado después de la calcinación.

### **Fabricación del Cemento Pórtland.**

Por la definición dada anteriormente, se puede observar que está compuesto principalmente por materiales calcáreos, tales como caliza, y por alúmina y sílice, que se encuentran como arcilla o pizarra. También se utiliza marga, que es un material calcáreo-arcilloso.

El proceso de fabricación del cemento consiste en moler finamente la materia prima, mezclarla minuciosamente en una cierta proporción y calcinarla en un horno rotatorio de gran dimensión, a una temperatura de 1300 a 1400 °C, a la cual el material se sintetiza y se funde parcialmente, formando bolas conocidas como Clinker. El Clinker se enfría y tritura hasta obtener un polvo fino; a continuación, se adiciona un poco de yeso y el producto comercial resultante es el Cemento Pórtland que tanto se usa en todo el mundo.

A continuación se describen algunos detalles de la fabricación del cemento:

La mezcla y la trituración de las materias primas pueden efectuarse tanto en húmedo como en seco; de aquí provienen los nombres de proceso “húmedo” o “seco”. El método de fabricación a seguir depende, además, de la naturaleza de las materias primas usadas.

Consideremos primero el proceso húmedo. Cuando se emplea marga, este material se tritura finamente y se dispersa en agua en un molino de lavado, el cual es un pozo circular con brazos revolventes radiales con rastrillos, los cuales rompen los aglomerados de materias sólidas. La arcilla también se tritura y se mezcla con agua, generalmente en un molino de lavado semejante al anterior. Enseguida se bombean las dos mezclas de tal manera que se mezclen en proporciones determinadas y pasen a través de una serie de cribas. La lechada resultante fluye a estanques de almacenamiento.

Si se emplea caliza, debe barrenarse, triturarse, generalmente en dos trituradoras, una más pequeña que la otra, y luego depositarse en un molino de bolas, con la arcilla dispersa en agua. Allí se continúa el molido de la caliza hasta el grado de finura de harina, y la lechada



resultante se bombea a estanques de almacenamiento. De aquí en adelante, el proceso es el mismo, sin importar la naturaleza original de las materias primas.

La lechada es un líquido de consistencia cremosa, con un contenido de agua entre un 35 y un 50 % y sólo una pequeña fracción del material, alrededor del 2% es mayor que el que pasa el tamiz de 90  $\mu\text{m}$ . Generalmente hay varios tanques de almacenamiento en los cuales se guarda la lechada; la sedimentación de los sólidos suspendidos se impide mediante agitación mecánica o por burbujeo de aire comprimido. El contenido de cal de la lechada está determinado por la proporción de materiales calcáreos o arcillosos originales, tal como se ha mencionado anteriormente. Un ajuste final para obtener la composición química requerida puede efectuarse mezclando lechadas de diferentes tanques de almacenamiento, utilizando a veces un sistema complicado de tanques de mezclado.

Finalmente, la lechada con el contenido de cal deseado pasa a un horno rotatorio. Se trata de un cilindro de acero de gran tamaño, recubierto de material refractario, con diámetro interior de hasta 5 m, y una longitud que a veces alcanza 150 m, el cual gira lentamente alrededor de su eje, levemente inclinado con respecto a la horizontal. La lechada se deposita en el extremo superior del horno, mientras que se añade carbón pulverizado mediante la insuflación de un chorro de aire en el extremo inferior, donde la temperatura alcanza de 1400 a 1500°C. El carbón, que no debe tener un contenido demasiado alto de cenizas, merece una mención especial, puesto que se consumen hasta 350 kilogramos para fabricar una tonelada de cemento. Es importante tener esto en cuenta al considerar el precio del cemento. En lugar de carbón se puede emplear petróleo o gas natural.

Cuando la lechada desciende dentro del horno, encuentra progresivamente mayores temperaturas. Primero se elimina el agua y se libera el  $\text{CO}_2$ ; posteriormente, el material seco sufre una serie de reacciones químicas hasta que, finalmente, en la parte más caliente del horno, un 20 a 30% del material se vuelve líquido y la cal, la sílice y la alúmina vuelven a combinarse. Después la masa se funde en bolas de diámetros que varían entre 3 y 25 mm, conocidas como Clinker. El Clinker cae dentro de enfriadores de diferentes tipos que a menudo favorecen un intercambio de calor con el aire que después se usa para la

combustión del carbón pulverizado. Un horno de grandes dimensiones puede producir más de 700 toneladas de cemento al día<sup>1</sup>.

El Clinker frío, que es característicamente negro, reluciente y duro, se mezcla con yeso para evitar un fraguado relámpago del cemento. La mezcla se efectúa en un molino de bolas compuesto por diversos compartimentos, los cuales tienen bolas de acero cada vez más pequeñas. En algunas plantas se emplea un sistema de circuito cerrado de mezcla donde el cemento descargado por el molino pasa a través de un separador, y las partículas finas se trasladan a un silo de almacenamiento por medio de una corriente de aire, mientras que las partículas mayores vuelven a pasar por el molino. El circuito cerrado de mezcla evita la producción de una gran cantidad de material excesivamente fino o de una pequeña cantidad de material demasiado grueso, fallas que a menudo se presentan en sistemas de molido de circuito abierto.

Una vez que el cemento se ha mezclado satisfactoriamente, cuando alcanza a tener hasta  $1.1 \times 10^{12}$  partículas por kilogramo, está en condiciones para empacarse en los conocidos sacos de papel Kraft (generalmente de 50 Kg), en tambores o para transportarse a granel.

En los procesos seco y semiseco, las materias primas se trituran y adicionan en las proporciones correctas en un molino de mezclado, donde se secan y se reduce su tamaño a un polvo fino. El polvo seco, llamado grano molido crudo, se bombea al silo de mezclado y se hace un ajuste final en la proporción de los materiales requeridos para la manufactura del cemento. Para obtener una mezcla íntima y uniforme, se mezcla el grano crudo, generalmente mediante aire comprimido, induciendo un movimiento ascendente del polvo y reduciendo su densidad aparente. El aire se bombea por turnos sobre cada cuadrante del silo y esto permite al material aparentemente más pesado de los cuadrantes no aireados, moverse lateralmente hacia el cuadrante aireado.

De este modo, el material aireado tiende a comportarse como un líquido y, por aireado sucesivo de todos los cuadrantes, que se completa en un período de alrededor de una hora, se obtiene una mezcla uniforme. En algunas plantas de cemento se emplean sistemas de mezclado continuo.

El gran molido y mezclado se pasa por un tamiz y se deposita en una cuba rotativa llamada granulador. Simultáneamente, se agrega agua en una cantidad correspondiente al 12% del peso del grano molido adicionado. De esta forma, se obtienen pastillas duras de alrededor de 15 mm de diámetro interior. Esto es conveniente, ya que si se introdujera directamente el polvo en el horno, se impediría el flujo de aire y el intercambio de calor necesarios para las reacciones químicas de la formación de Clinker de cemento.

Las pastillas se hornean en una rejilla de precalentamiento, mediante gases calientes del horno, hasta endurecer. Enseguida, las pastillas se meten al horno y las operaciones posteriores son las mismas que en el proceso de fabricación en húmedo. Sin embargo, como el contenido de humedad de las pastillas es de sólo 12%, comparado con el 40% de la lechada empleada en el proceso húmedo, el horno empleado en el proceso seco tiene dimensiones considerablemente menores. La cantidad de calor requerida es mucho más baja, puesto que hay que eliminar alrededor de 12% de humedad, aunque ya se ha utilizado previamente calor adicional para remover la humedad original de las materias primas (generalmente del 6 al 10%). El proceso es, por tanto, bastante económico, pero sólo si las materias primas están relativamente secas. En tal caso, el consumo total de carbón puede ser tan pequeño como 100 kilogramos por tonelada de cemento.

Las dificultades de control del mezclado seco han impedido hasta ahora un uso más amplio de este tipo de proceso. En diversos países se utilizan pequeños hornos verticales, en los cuales se producen hasta 150 toneladas de cemento al día<sup>1</sup>.

Es importante aclarar que una mezcla minuciosa de materias primas es necesaria, debido a que una parte de las reacciones que ocurren en el horno debe producirse por difusión de materiales sólidos, y una distribución adecuada del material es esencial para asegurar la uniformidad del producto.

Existen otros procesos de fabricación del cemento. Aquí mencionaremos uno de ellos, en el que se utiliza yeso en vez de cal. En un horno rotatorio se queman yeso, arcilla y coque con arena y óxido de fierro, y el producto final es Cemento Pórtland y dióxido de azufre, el cual se convierte posteriormente en ácido sulfúrico.

### Hidratación del cemento.

La reacción mediante la cual el Cemento Pórtland se transforma en un agente de enlace se produce en una pasta de cemento y agua. En otras palabras, en presencia del agua, los silicatos y aluminatos mostrados en la siguiente tabla, forman productos de hidratación, que con el paso del tiempo producen una masa firme y dura: la pasta de cemento endurecida.

Compuestos principales del Cemento Pórtland		
Nombre del Compuesto	Composición del Óxido	Abreviatura
Silicato tricálcico	$3\text{CaO SiO}_2$	$\text{C}_3\text{S}$
Silicato dicálcico	$2\text{CaO SiO}_2$	$\text{C}_2\text{S}$
Aluminato tricálcico	$3\text{CaO Al}_2\text{O}_3$	$\text{C}_3\text{A}$
Aluminoferrito tetracálcico	$4\text{CaO Al}_2\text{O}_3 \text{Fe}_2\text{O}_3$	$\text{C}_4\text{AF}$

Tabla 1.1

Los compuestos de los diferentes tipos de cemento pueden reaccionar con el agua de dos formas distintas. En la primera, se produce una adición directa de algunas moléculas de agua, lo cual constituye una reacción de hidratación real. El segundo tipo de reacción es la hidrólisis. Sin embargo, por comodidad y por costumbre se aplica el término de hidratación a todas las reacciones de cemento con agua, es decir, tanto la hidratación real como la hidrólisis.

Le Chatelier fue el primero en observar que los productos de hidratación del cemento son químicamente iguales a los productos de hidratación de los compuestos individuales, en condiciones similares. Esto fue confirmado después por Steinour y por Bogue y Lerch, con la salvedad de que los productos de reacción pueden influirse unos a otros o interactuar con los demás compuestos presentes. Los dos silicatos de calcio son los dos principales

compuestos cementantes del cemento, y el comportamiento físico del cemento durante la hidratación es semejante al de ambos compuestos por separado.

Los productos de la hidratación del cemento poseen baja solubilidad en agua. Esto está demostrado por la estabilidad de la parte del cemento endurecida en contacto con el agua. El cemento hidratado se enlaza firmemente con el cemento que no ha reaccionado, pero el mecanismo exacto del proceso no se conoce con claridad. Es posible que el hidrato recién producido forme una envoltura, la cual crece desde adentro debido a la acción del agua que ha penetrado en la película de hidrato envolvente. Por otra parte, los silicatos disueltos pueden pasar a través de la envoltura y precipitarse como capas exteriores. Una tercera posibilidad consiste en que la solución coloidal se precipite a través de la masa después de haber alcanzado condiciones de saturación y toda hidratación posterior se produzca dentro de esta estructura.

Cualquiera que sea la forma de precipitación de los productos de hidratación, la velocidad de hidratación disminuye continuamente, de modo que, aún después de transcurrido mucho tiempo, todavía queda una buena cantidad de cemento deshidratado. Por ejemplo, después de 28 días en contacto con agua, se han encontrado granos de cemento que se han hidratado sólo hasta una profundidad de  $4\ \mu\text{m}$  y  $8\ \mu\text{m}$  después de un año. Powers calculó que la hidratación completa bajo condiciones normales es sólo posible para partículas de cemento menores de  $50\ \mu\text{m}$ , pero se ha obtenido hidratación completa al moler continuamente cemento en agua durante 5 días.

El examen microscópico del cemento hidratado no evidencia canalización de agua en los granos de cemento para la hidratación selectiva de los compuestos más reactivos (por ejemplo el silicato tricálcico), que pueden ubicarse en el centro de la partícula. Parece, por esto, que la hidratación avanza mediante una reducción gradual del tamaño de la partícula de cemento. De hecho, se han encontrado granos deshidratados de cemento grueso con silicatos tricálcicos y dicálcicos después de varios meses, y es posible que los granos pequeños de silicato dicálcico se hidraten antes de completarse la hidratación de granos mayores de silicato tricálcico. Los diversos compuestos del cemento se encuentran generalmente intermezclados en todos los tipos de granos, y algunas investigaciones han

sugerido que el residuo de un grano, después de cierto período de hidratación, tiene la misma composición, en porcentaje, que el total del grano original. Sin embargo, la composición del residuo cambia a través del período de hidratación del cemento y específicamente durante las primeras 24 horas puede haber una hidratación selectiva.

Los principales hidratos pueden clasificarse a grandes rasgos en hidratos de silicato de calcio e hidrato de aluminato tricálcico. Se cree que el aluminoferrito tetracálcico se hidrata en hidrato de aluminato tricálcico y en una fase amorfa. Es posible que haya también algo de  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  en la solución sólida del hidrato de aluminato tricálcico.

El desarrollo del proceso de hidratación del cemento puede determinarse por diferentes métodos, como la medida de: a) la cantidad de  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  en la pasta; b) el calor cedido por la hidratación; c) la densidad de la pasta; d) la cantidad de agua químicamente combinada; e) la cantidad de cemento deshidratado (utilizando análisis de rayos X cuantitativo) y f) indirectamente a través de la resistencia de la pasta hidratada.

También son posibles estudios de las pastas húmedas, en proceso de hidratación, mediante técnicas termogravimétricas y exploraciones continuas por difracción de rayos X.

### **Fraguado.**

Este es el término utilizado para describir la rigidez de la pasta del cemento aún cuando la definición de rigidez de la pasta puede considerarse un poco arbitraria. Hablando en forma aproximada, el fraguado se refiere a un cambio de fluido a un estado rígido. Aunque durante el fraguado la pasta requiere de alguna resistencia, para efectos prácticos es conveniente distinguir el fraguado del endurecimiento, pues este último término se refiere al aumento de resistencia de una pasta de cemento fraguada.

En la práctica se utilizan los términos de fraguado inicial y fraguado final para describir etapas de fraguado elegidas arbitrariamente.

Parece que el fraguado es causado por una hidratación selectiva de algunos componentes del cemento: los dos primeros en reaccionar son aluminato tricálcico y silicato tricálcico. El silicato tricálcico provoca un fraguado relámpago, pero la adición de yeso retrasa la

formación del hidrato de aluminato de calcio y, de este modo, el silicato tricálcico se fragua primero. El silicato tricálcico puro mezclado con agua también presenta un fraguado inicial, pero el silicato dicálcico se endurece en forma más gradual.

En un cemento retardado en forma adecuada, la estructura de la pasta de cemento hidratada se establece por medio del silicato de calcio hidratado, mientras que si se permitiera al aluminato tricálcico fraguar primero se formaría un hidrato de aluminato de calcio más poroso. El resto de los componentes del cemento se hidrataría también dentro de esta estructura porosa y las características de resistencia de este cemento se verían afectadas en forma adversa.

Aparte de la rapidez de formación de productos cristalinos, se han indicado también como factores del progreso del fraguado el desarrollo de películas alrededor de los granos del cemento y la coagulación conjunta de los compuestos de la pasta.

El proceso de fraguado va acompañado por cambios de temperatura en la pasta del cemento: el fraguado inicial corresponde a un rápido aumento de temperatura, y el final, al máximo de temperatura. En este momento también se produce una fuerte caída en la conductividad eléctrica, por lo que se han realizado algunos intentos por medios eléctricos.

El tiempo de fraguado de un cemento disminuye al aumentar la temperatura, pero sobre los 30 °C se puede observar un efecto inverso. A bajas temperaturas el fraguado se retarda.

Se da el nombre de “fraguado falso” a una rigidez prematura y anormal del cemento, que se presenta dentro de los dos primeros minutos después de haberlo mezclado con agua. Difiere del fraguado relámpago en que no despiden calor en forma apreciable y, si se vuelve a mezclar la pasta de cemento, sin adición de agua se reestablece su plasticidad y fragua normalmente sin pérdida de resistencia.

Algunas de las causas del fraguado falso pueden encontrarse en la deshidratación del yeso cuando se mezcla con un Clinker demasiado caliente: se produce hemihidrato o anhídrita y, cuando se mezcla el cemento con agua, estos compuestos se hidratan para formar yeso. De esta manera, se produce un fraguado de la pasta que da como resultado una rigidización de la mezcla agua – cemento.

Otra causa del fraguado falso puede asociarse con los álcalis del cemento. Al almacenarse el cemento, los álcalis pueden carbonatarse y los carbonatos alcalinos reaccionan con el  $\text{Ca(OH)}_2$  liberado por la hidrólisis del silicato tricálcico para formar  $\text{CaCO}_3$ . Este precipita e induce a una rigidización de la pasta.

También se ha sugerido que el fraguado falso se puede deber a una activación del silicato tricálcico por aereación en humedades relativamente altas. El agua es absorbida por los granos de cemento; por lo tanto, estas superficies recién activadas pueden combinarse en forma muy rápida con más agua durante la mezcla, lo cual produce un falso fraguado.

Las pruebas de laboratorio en fábrica de cemento, generalmente eliminan la posibilidad de fraguados falsos en el cemento. Sin embargo, si se encuentra un fraguado en falso, puede remediarse mezclando el concreto sin adicionar agua. Aunque esto no resulta fácil, la trabajabilidad puede mejorar y la pasta de cemento vuelve a sus condiciones normales.

### **Estructura del cemento hidratado.**

Muchas de las propiedades mecánicas del cemento y del concreto endurecidos parecen depender no tanto de la composición química del cemento hidratado, sino más bien de la estructura física de los productos de hidratación, vistos a nivel de sus dimensiones coloidales. Por esta razón, es importante tener una imagen clara de las propiedades físicas del gel de cemento.

La pasta de cemento fresco es una red de cemento en agua, pero una vez que la pasta ha fraguado, su volumen aparente o bruto permanece aproximadamente constante. En cualquier etapa de hidratación, la pasta endurecida consta de hidratos de varios compuestos, denominados colectivamente como gel de cristales de  $\text{Ca(OH)}_2$ , algunos componentes menores, cemento deshidratado y residuos de los espacios rellenos de agua en la pasta fresca. Estos huecos se denominan poros capilares, pero dentro del gel mismo existen huecos intersticiales llamados poros de gel. Por lo tanto, en una pasta hidratada hay dos clases distintas de poros, que se representan esquemáticamente en la Figura 1.1, en la que los puntos rellenos (de tamaño exagerado) representan partículas de gel, los espacios



intersticiales son poros de gel y los espacios marcados con C son cavidades capilares. Puesto que la mayoría de los productos de hidratación son coloidales, el área superficial de la fase sólida aumenta enormemente durante la hidratación, y una gran cantidad de agua libre es absorbida sobre esta superficie. Si no se permite el movimiento de agua hacia la pasta de cemento o desde ella, las reacciones de hidratación consumen el agua, hasta que queda demasiado poca para saturar la superficie sólida, lo cual disminuye la humedad relativa dentro de la pasta. Esto se conoce como autodesecación. Puesto que el gel sólo se puede formar en espacios llenos de agua, la autodesecación causa una hidratación menor, comparada a la de una pasta curada en humedad. Sin embargo, una pasta de autodesecación con relaciones de agua / cemento con un exceso de 0.5 sobre la cantidad de agua de mezcla, es suficiente para que la hidratación proceda a la misma velocidad como si se realizara con humedad.

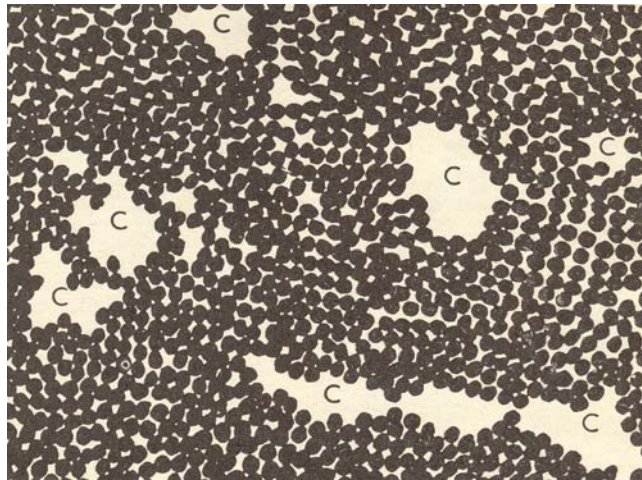


Figura 1.1

### **Resistencia mecánica del gel de cemento.**

Hay dos teorías básicas sobre el endurecimiento o el aumento en resistencia del cemento. La que propuso H. Le Chatelier en 1882 afirma que los productos de hidratación del cemento tienen una solubilidad más baja que los compuestos originales, de tal forma que los hidratos se precipitan desde una solución sobresaturada. El precipitado se encuentra en

forma de cristales alargados y entrelazados que poseen propiedades altamente cohesivas y adhesivas.

La teoría coloidal, propuesta por W. Michaëlis en 1893, establece que los aluminatos cristalinos, los sulfoaluminatos y los hidróxidos de calcio dan la resistencia inicial del material. El agua saturada de cal posteriormente ataca a los silicatos, lo cual produce un silicato hidratado de calcio, que es bastante insoluble y forma una masa gelatinosa. Esta masa endurece gradualmente, debido a la pérdida de agua, ya sea por secado externo o por hidratación de los núcleos no hidratados de los granos del cemento, y se obtiene de esta manera una cohesión.

A la luz de los conocimientos modernos, se ha visto que ambas teorías contienen elementos de verdad y no son en absoluto irreconciliables. En particular, los químicos coloidales han encontrado que muchos, cuando no la mayoría de los coloidales, se componen de partículas cristalinas extremadamente pequeñas, cuyas grandes áreas superficiales les dan lo que parecen ser propiedades diferentes a las de los sólidos normales. De este modo, el comportamiento coloidal es esencialmente una función del tamaño del área superficial, más bien que de la no – regularidad de la estructura interna de las partículas involucradas<sup>2</sup>.

En el caso del cemento Pórtland, se ha encontrado que, al mezclarlo con una gran cantidad de agua, produce una solución sobresaturada en  $\text{Ca(OH)}_2$  dentro de las dos primeras horas, con una concentración de hidrato de silicato de calcio en forma metaestable<sup>3</sup>. Este hidrato se precipita rápidamente, de acuerdo con la teoría de Le Chatelier; el endurecimiento consiguiente puede deberse al retiro del agua del material hidratado, como postula Michaëlis

Un trabajo experimental posterior ha mostrado que los silicatos de calcio hidratado son de hecho cristales engranados extremadamente pequeños (submicroscópicos), los cuales, debido a su tamaño, podrían describirse también como gel. Si se mezcla cemento con una pequeña cantidad de agua, el grado de cristalización es probablemente más pobre y se obtienen cristales mal formados. De este modo, la controversia Le Chatelier – Michaëlis se reduce simplemente a un asunto de terminología, puesto que se trata de un gel compuesto por cristales.

Por conveniencia, se extenderá el término de gel de cemento para incluir el hidróxido de calcio cristalino. Por lo tanto, se supone que gel significa la masa cohesiva de cemento hidratado en su pasta más densa, es decir, incluidos los poros de gel, siendo la porosidad característica de alrededor de 28%.

No se ha comprendido completamente cuál es la fuente real de resistencia del gel, pero probablemente se debe a dos tipos de enlaces cohesivos. El primero es la atracción física entre las superficies sólidas, separadas sólo por pequeños poros de gel (15 a 20 Å); a esta atracción se le designa generalmente como fuerza de Van der Waals.

El segundo tipo de fuente de cohesión es el enlace químico. Puesto que el gel de cemento es de tipo de hinchazón limitada (es decir, que las partículas no pueden dispersarse por adición de agua), parece ser que las partículas de gel están reticuladas por fuerzas químicas. Estas son mucho más fuertes que las fuerzas de Van der Waals, pero los enlaces químicos cubren sólo una pequeña fracción del límite de la partícula de gel.

Por otra parte, un área superficial de tanta magnitud como la del gel de cemento no es una condición necesaria para que se desarrolle una alta resistencia, tal como la de pastas de cemento curadas con vapor a alta presión, que tienen una reducida área superficial y excelentes propiedades hidráulicas.

Por lo tanto, no se puede estimar la importancia relativa de los enlaces físicos y químicos, pero no hay duda de que ambos contribuyen a la adquisición de la considerable resistencia de la pasta endurecida.

### **Agua contenida en la pasta de cemento hidratado.**

En repetidas ocasiones se ha mencionado la presencia de agua en el cemento hidratado. La pasta del cemento es verdaderamente higroscópica, debido al carácter hidrófilo del cemento, unido a la presencia de los poros submicroscópicos. El contenido real de agua de la pasta depende de la humedad ambiente. En particular, debido a su tamaño comparativamente grande, los poros están vacíos cuando la humedad cae bajo el 45%,<sup>4</sup> pero el agua se absorbe en los poros de gel aún a humedad ambiente muy baja.

Por lo tanto, se puede ver que el agua en el cemento hidratado queda retenida con distintos grados de firmeza. En un extremo, hay agua libre; en el otro, agua químicamente combinada formando una parte definida del compuesto hidratado. Entre estas dos categorías hay agua de gel retenida en una variedad de otras formas.

El agua retenida mediante las fuerzas superficiales de las partículas de gel se llama agua absorbida, y la parte que se mantiene entre la superficie de ciertos planos en un cristal se denomina agua zeolítica o entre capas. El agua de celosía es la parte del agua de cristalización que no está asociada químicamente con los principales constituyentes del enrejado. La siguiente figura muestra un esquema de la estructura de los silicatos hidratados.

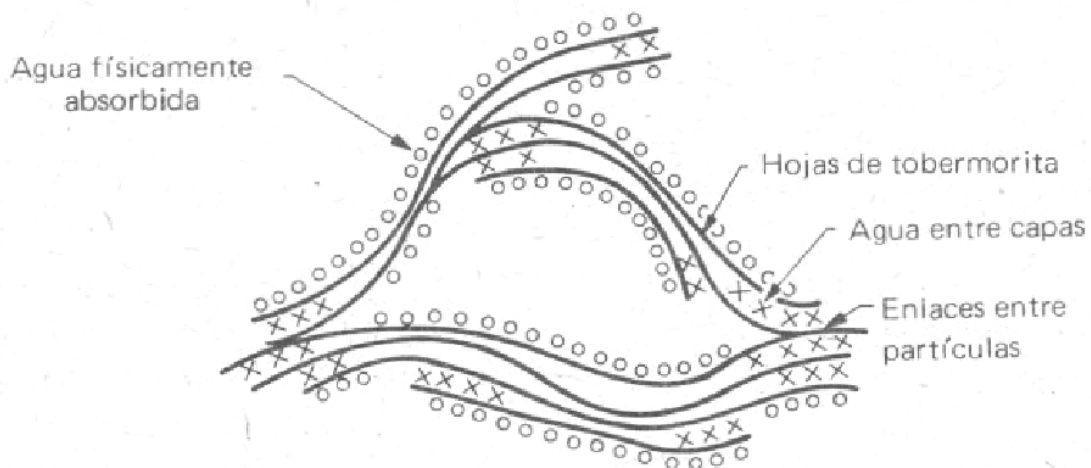


Figura 1.2

El agua libre está sujeta en los capilares y queda más allá de la clasificación de las fuerzas superficiales de las fases sólidas.

No existe ninguna técnica para determinar cómo se distribuye el agua entre estos diferentes estados; tampoco es fácil predecir esas divisiones a partir de consideraciones teóricas, puesto que la energía de enlace del agua combinada en el hidrato es del mismo orden de magnitud que la energía de enlace del agua absorbida. Sin embargo, investigaciones recientes efectuadas con algunos caolines que se pueden hinchar mediante técnicas de resonancia magnética nuclear han sugerido que el gel de agua tiene la misma energía de

enlace que el agua entre capas; por lo tanto, gel de agua puede estar perfectamente en forma de intercapa.<sup>5</sup>

Una clasificación cómoda del agua en el cemento hidratado para efectos de investigación, distingue dos categorías: agua evaporable y no evaporable. Esto se logra por medio del secado de la pasta de cemento hasta obtener un equilibrio (es decir, un peso constante) a una presión de vapor determinada. Esta separación es forzosamente arbitraria, puesto que la relación entre la presión de vapor y el contenido de agua en un cemento es continua. Por el contrario, con hidratos cristalinos se producen interrupciones en esta relación. Sin embargo, en términos generales, el agua no evaporable contiene casi toda el agua químicamente combinada y, además, algo de agua que no se encuentra ligada por enlaces químicos. Esta agua tiene una presión de vapor inferior a la de la atmósfera ambiente y, de hecho, esta cantidad de agua es una función continua de la presión de vapor del ambiente.

La cantidad de agua no evaporable aumenta al avanzar la hidratación, pero, en una pasta saturada, el agua no evaporable nunca puede ser superior a la mitad del agua total presente. En cementos bien hidratados, el agua no evaporable corresponde a alrededor de un 18% en peso del material anhidro; esta proporción aumenta hasta el 23% en cementos totalmente hidratados. De la proporcionalidad entre la cantidad de agua no evaporable y el volumen sólido de la pasta del cemento, se deduce que el primer volumen puede ser utilizado como una medida de la cantidad de gel de cemento presente, es decir, del grado de hidratación.

La energía de enlace se determina por la forma en que se mantiene el agua en una pasta de cemento. Por ejemplo, se necesitan 1 670 Joules (400 Cal) para establecer un enlace en un gramo de agua no evaporable, mientras que la energía del agua de cristalización del  $\text{Ca(OH)}_2$  es de 3 560 Joules (850 Cal) por gramo. De igual forma, la densidad del agua varía: es aproximadamente 1.2 para el agua no evaporable, 1.1 para el gel y 1.0 para el agua libre. Se ha sugerido que el aumento en la densidad del agua absorbida a bajas concentraciones superficiales no es el resultado de la compresión, sino que está causada por la orientación de las moléculas en la fase absorbida, debido a la acción de las fuerzas superficiales.

### **Calor de hidratación del cemento.**

De acuerdo con muchas reacciones químicas, la hidratación de compuestos del cemento es exotérmica, y pueden liberarse hasta 500 Joules por gramo (120 Cal / g). Puesto que la conductividad del concreto es relativamente baja, actúa como aislante, y en el interior de una masa grande de concreto, la hidratación puede producir un fuerte incremento de temperatura. Al mismo tiempo, la masa exterior del concreto pierde algo de calor, de modo que se produce un importante gradiente de temperatura y, durante el enfriamiento posterior del interior, pueden producirse graves agrietamientos. Sin embargo, este comportamiento se modifica por la fluencia del concreto.

Por otra parte, el calor producido por la hidratación del cemento puede impedir el congelamiento del agua en los capilares de concreto recientemente aplicado, en aguas heladas y es, por tanto, ventajoso que haya una gran dispersión de calor. Sin duda, es aconsejable conocer las propiedades productoras de calor de diferentes cementos a fin de poder elegir el cemento más adecuado para cada situación.

El calor de hidratación es la cantidad de calor en calorías por gramo de un cemento deshidratado, dispersado por una hidratación completa a una temperatura dada. El método más común para medir el calor de hidratación consiste en determinar el calor de solución de cementos deshidratados e hidratados en una mezcla de ácidos nítrico y fluorhídrico; la diferencia entre estos dos valores representa el calor de hidratación.

Aunque no hay dificultades especiales en esta prueba, debe tenerse cuidado en prevenir la carbonatación del cemento deshidratado, puesto que la absorción del 1% de CO<sub>2</sub> origina un descenso aparente en el calor de hidratación de 24.3 Joules / g (5.8 Cal / g) de un total de 250 Joules / g.<sup>6</sup> La temperatura a la cual se produce la hidratación afecta mucho las velocidades de desarrollo de calor, como puede verse en los datos de la Tabla 1.2, los cuales representan el calor desarrollado después de 72 horas a diferentes temperaturas.<sup>7</sup>

Calor de hidratación desarrollado a:								
Tipo de cemento * * Los tipos de cemento se tratarán en la siguiente sección.	4° C		24° C		32° C		41° C	
	J / g	Cal / g	J / g	Cal / g	J / g	Cal / g	J / g	Cal / g
I	154	36.9	285	68.0	309	73.9	335	80.0
III	221	52.9	348	83.2	357	85.3	390	93.2
IV	108	25.7	195	46.6	192	45.8	214	51.2

Tabla 1.2

En un sentido estricto, el calor de hidratación como medida, se compone de los calores químicos de reacción de hidratación y el calor de absorción del agua sobre la superficie del gel que se ha formado por un proceso de hidratación. Este último calor causa aproximadamente  $\frac{1}{4}$  del calor total de hidratación. Por lo tanto, el calor de hidratación es realmente una cantidad compuesta.

Para efectos prácticos, no importa necesariamente el calor total de hidratación, sino la velocidad de desarrollo del calor. La misma cantidad de calor producida en un período mayor puede disiparse en mayor grado, con menor aumento consecuente de la temperatura. La velocidad de desarrollo del calor puede medirse fácilmente en un calorímetro adiabático. En la Figura 1.3, se representan curvas típicas tiempo – temperatura, obtenidas en condiciones adiabáticas, para diferentes cementos.

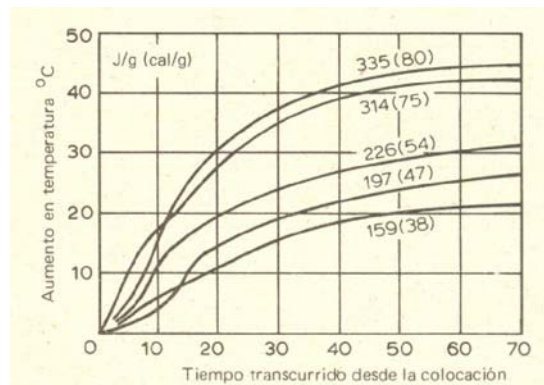


Figura 1.3

Fernando Pérez Godínez

Para las variedades usuales de cemento Pórtland, Bogue<sup>3</sup> observó que aproximadamente la mitad del calor total se libera entre uno y tres días; aproximadamente  $\frac{3}{4}$  en siete días y 83 a 91% del total del calor en seis meses. De hecho, el calor de hidratación depende de la hidratación química del cemento, y el calor de hidratación del cemento es aproximadamente igual a la suma de los calores de hidratación de sus compuestos individuales, hidratados por separado.

### **Tipos de Cemento Pórtland.**

En la sección anterior, se habló de las propiedades generales del cemento Pórtland, y se ha visto cómo los cementos que difieren en composición química y características físicas pueden mostrar diferentes propiedades cuando se hidratan. Así, de este modo, debería ser posible seleccionar mezclas de materias primas para la producción de cementos con diversas propiedades deseadas. Al efecto, se ofrecen comercialmente varios tipos de cemento Pórtland especiales que se pueden producir para usos específicos.

En la siguiente tabla, se muestran los siguientes tipos de cementos Pórtland:

<b>Principales tipos de cementos Pórtland</b>	
<b>Descripción Inglesa</b>	<b>Descripción ASTM</b>
Pórtland Ordinario	Tipo I
Pórtland de endurecimiento rápido	Tipo III
Pórtland de endurecimiento extra – rápido	Rapicreto
Pórtland de ultra – alta resistencia rápida	Cemento de Fraguado Regulado
Pórtland de bajo calor	Tipo IV
Cemento modificado	Tipo II
Pórtland resistente a los sulfatos	Tipo V
Pórtland de escoria de alto horno	Tipo IS
Pórtland blanco	Tipo I Blanco
Pórtland puzolana	Tipo IP

NOTA: Los cementos tipo I, IS, IP, II y III se elaboran también con un agente inclusor de aire y se denotan, agregándoles una letra A; por ejemplo Tipo IA.

**Tabla 1.3**

Fernando Pérez Godínez



Muchos de los cementos se han desarrollado para asegurar una buena duración del concreto sometido a una variedad de condiciones. Sin embargo, no ha sido posible encontrar en la constitución del cemento una respuesta completa al problema de durabilidad del concreto: las principales propiedades mecánicas del concreto endurecido, como resistencia, contracción, permeabilidad, resistencia a la intemperie y fluencia, se ven afectados también por factores distintos a la constitución del cemento.

Enseguida se describirá brevemente el conjunto de propiedades de cada tipo de cemento de la Tabla 1.3.

### **Cemento Pórtland Ordinario.**

Es el más frecuentemente utilizado en todo el mundo. Este cemento (Tipo I), es admirablemente apropiado para construcciones de concreto en general, no expuestas a sulfatos del suelo o del agua freática.

Este cemento permite que el aumento de resistencia a la compresión simple de un concreto con curado continuo en agua, con una relación agua / cemento de 0.53, sea de 20 MN / m<sup>2</sup> (210 Kg<sub>f</sub> / cm<sup>2</sup>) entre los 28 días y los 10 años.<sup>8</sup>

### **Cemento Pórtland de endurecimiento rápido.**

Este cemento (Tipo III), es un cemento de alta resistencia a temprana edad, no debe confundirse con la rapidez de fraguado: de hecho, el cemento Tipo I y éste tienen tiempos de fraguado parecidos.

La resistencia desarrollada con cemento Tipo III a los 3 días, equivale a la del Tipo I en 7 días, para un concreto elaborado con la misma relación agua / cemento.

Esta mayor rapidez de adquisición de resistencia, se debe a un contenido más alto de C<sub>3</sub>S (silicato tricálcico) y a un molido más fino del Clinker del cemento Tipo III, con respecto al Tipo I.

El uso de cemento de endurecimiento rápido está indicado cuando, por ejemplo, las cimbras se deben retirar muy pronto para volverlas a usar, o cuando se requiere resistencia suficiente para continuar la obra con rapidez máxima. El costo del cemento Tipo III, es sólo un poco mayor que el del Tipo I, así que este cemento se usa frecuentemente.

Ya que el aumento rápido de resistencia libera una mayor cantidad de calor de hidratación, el cemento Tipo III no debe usarse en construcción masiva ni en secciones estructurales grandes. Por otro lado, para construcciones a bajas temperaturas, un cemento que libera más calor puede resguardarse de los daños del congelamiento prematuro.

### **Cementos Pórtland especiales de endurecimiento rápido.**

Hay varios cementos de fabricación especial con propiedades de endurecimiento particularmente rápido. Uno de ellos, que se conoce como **extra – rápido**, se obtiene al intercalar cloruro de calcio en el molido del cemento Tipo III.

El cemento extra – rápido, debe almacenarse en un ambiente seco y, por lo general, debe usarse antes de que transcurra un mes desde su salida de la fábrica de cemento.

El cemento extra – rápido es adecuado para la colocación de concreto en climas fríos, o cuando se requiere una resistencia temprana muy elevada y no conviene utilizar cemento aluminoso.

La resistencia del cemento extra – rápido es alrededor de un 25% más alta que la del cemento tipo III a 1 ó 2 días, y de 10 a 20% más alta a los 7 días.

El tiempo de fraguado del cemento extra – rápido es corto: de 5 a 30 minutos, según sea la temperatura, por lo que es muy útil cuando se usan cimbras deslizantes en la construcción de silos o columnas de gran envergadura. La contracción es un poco mayor que cuando se usa cemento Tipo III.

Si no puede obtenerse cemento extra – rápido en la planta, se puede usar cemento Tipo III y agregársele, en obra, cloruro de calcio justo antes de mezclar el concreto. En este caso, el cloruro de calcio actúa como un acelerante.

Otro tipo de cemento con propiedades de endurecimiento rápido se llama cemento Pórtland de **ultra – alta resistencia rápida**. Este cemento no tiene aditivos; el desarrollo de la alta resistencia proviene de una gran finura del cemento. Debido a esto, el contenido de yeso debe ser mayor que el de los otros cementos. El alto contenido de yeso en este tipo de cemento, no tiene efectos adversos sobre los cambios de volumen a largo plazo, porque el yeso se consume en las primeras reacciones de hidratación.

El cemento se fabrica separando los finos del cemento Tipo III, mediante un separador ciclónico de aire. Debido a su alta finura, el cemento de ultra – alta resistencia rápida tiene baja densidad aparente y se deteriora rápidamente a la intemperie. La alta finura causa una hidratación rápida, y por eso, el calor de hidratación a cortas edades es mayor, lo que ocasiona un rápido desarrollo de resistencia; por ejemplo, la resistencia a los 3 días del cemento Tipo III, se alcanza a las 16 horas, y la de 7 días a las 24 horas.

El cemento de ultra – alta resistencia rápida se ha usado satisfactoriamente en estructuras donde al presforzar o poner en servicio la obra a corta edad es importante. La contracción y la fluencia no difieren significativamente respecto a los valores obtenidos con otros cementos Pórtland cuando las proporciones de la mezcla son las mismas. Sin embargo, para las mismas proporciones de mezclado, el cemento de ultra – alta resistencia rápida tiene una menor trabajabilidad que los otros tipos de cemento.

El cemento de ultra – alta resistencia rápida, se vende con el nombre de Swiftcrete (Rapicrete). Un cemento de finura algo menor es el cemento **Speed**, desarrollado en Bélgica y es útil para colocar concreto en invierno o para trabajos urgentes, como los de reparar un camino, sellar pozos, etc.

Un cemento más, clasificado como de muy alta resistencia rápida, es el que se llama **cemento de fraguado regulado**, que está siendo utilizado mucho en Estados Unidos. Este cemento consiste esencialmente en una mezcla de cemento Pórtland y Aluminato de Flúor y Calcio, con un retardador apropiado. El tiempo de fraguado del cemento puede variar entre 1 y 30 minutos y se controla en la manufactura del cemento.

El desarrollo de la resistencia rápida está bajo el control del contenido de Aluminato de Flúor y Calcio.

### **Cemento Pórtland de bajo calor.**

La elevación de la temperatura en el interior de una masa grande de concreto, debida al calor desarrollado por la hidratación del cemento, puede provocar agrietamientos graves. Por esta razón, es necesario limitar la evolución del calor del cemento usado en este tipo de estructura: puede disiparse una proporción mayor de calor, lo cual resulta en una elevación menor de temperatura.

El cemento con bajo desarrollo de calor fue producido por primera vez para grandes presas en los Estados Unidos y se conoce como cemento Pórtland de bajo calor (Tipo IV).

El contenido más bajo de los componentes de hidratación más rápida,  $C_3S$  y  $C_3A$  (Silicato tricálcico y Aluminato tricálcico), tiene como resultado un menor desarrollo de resistencia en el cemento de bajo calor, comparado con el cemento Pórtland ordinario, pero la resistencia final no se ve afectada.

Existe cemento Pórtland de bajo calor hecho con escoria de alto horno.

Para algunas aplicaciones, la baja resistencia rápida puede significar una desventaja y, por esta razón un cemento que se llama modificado (Tipo II) fue desarrollado en Estados Unidos. Este cemento modificado combina adecuadamente una proporción mayor de desarrollo de calor que aquélla del cemento de bajo calor con un aumento de resistencia similar a la del cemento Pórtland ordinario. El cemento modificado se recomienda para estructuras donde se desea un calor de hidratación moderadamente bajo, o cuando se temen ataques moderados de sulfatos.

### **Cemento resistente a sulfatos.**

Al hablar de las reacciones de hidratación del cemento, y en particular del proceso de fraguado, se ha hecho mención de la reacción entre el aluminato tricálcico y el yeso, y de la consecuente formación de sulfoaluminato de calcio. En el cemento endurecido, el aluminato de calcio hidratado puede reaccionar de manera parecida con alguna sal de sulfato que venga de fuera del concreto; el producto de la adición es un sulfoaluminato de

calcio, que se forma dentro de la masa de la pasta de cemento hidratado. Ya que el incremento de volumen de la fase sólida es del 227%, sobreviene una gradual desintegración del concreto. Un segundo tipo de reacción se produce al intercambiar bases entre el hidróxido de calcio y los sulfatos, que resulta en la formación de yeso con un incremento de volumen en la fase sólida del 124%.

Estas reacciones son conocidas como ataque de sulfatos. Las sales particularmente activas son el sulfato de sodio y de magnesio. El ataque de los sulfatos se acelera si va acompañado por una sucesión de estados recíprocos mojados y secos, como es el caso de una estructura marina situada en la zona de mareas. El remedio consiste en usar cemento con bajo contenido de aluminato tricálcico.

Este cemento resistente a sulfatos también se llama cemento Tipo V.

El calor desarrollado por el cemento resistente a sulfatos no es mucho mayor que el del cemento de bajo calor. Por tanto, parecería que el cemento resistente a sulfatos debería ser, teóricamente, un cemento ideal, pero debido a los requisitos especiales de composición de la materia prima necesaria para su elaboración, por lo general el cemento resistente a sulfatos no puede fabricarse de manera económica.

### **Cemento Pórtland de escoria de alto horno.**

Este tipo de cemento se elabora al moler juntos Clinker de cemento Pórtland y escoria granulada de alto horno, sin que la proporción de esta última exceda del 65% del peso de la mezcla.

La escoria de alto horno es producto de desecho de la fabricación de hierro en lingotes, donde se obtienen cantidades de hierro y escoria del mismo orden. La escoria de alto horno es una mezcla de cal, sílice y aluminio, o sea los mismos óxidos que hacen el cemento Pórtland, pero en distintas proporciones. Aunque no se puede dar su gama de valores, se puede observar que algunas escorias satisfactorias tienen la siguiente composición: 42% de cal, 30% de sílice, 19% de aluminio, 5% de magnesio y 1% de álcalis.

La escoria de alto horno varía mucho en su composición y su estructura física, según sean los procesos de elaboración y el método de enfriamiento. Como ingrediente del cemento de escoria de alto horno, este material debe apagarse hasta que se solidifique como vidrio, impidiendo la formación de cristales. El enfriamiento rápido por agua causa una fragmentación granular.

La escoria de hierro puede formar un material cementante de diferentes maneras. Primero, puede ser usado junto con piedra caliza como materia prima para la manufactura convencional del cemento Pórtland. El clinker formado con estos materiales suele usarse (junto con la escoria) en la manufactura del cemento Pórtland de escoria de alto horno.

Este último tipo de cemento representa el segundo uso importante de la escoria. Se echa a un molino escoria granulada de hierro junto con clinker de cemento Pórtland, y se agrega yeso para controlar el fraguado. El cemento Pórtland de escoria de alto horno se elabora en Escocia, en Estados Unidos (Tipo IS), en Alemania [EisenPortland (con hasta 30% de escoria) y Hochofen (con 31% a 85% de escoria)], en Francia [Ciment Metallurgique Mixte (50% de escoria) y Ciment de Aut. Forneau (con 65% a 75% de escoria)]. En Bélgica se ha desarrollado el proceso Trief, en el cual se introduce escoria granulada, molida en húmedo, en forma de lechada, con la mezcladora de concreto, junto con el cemento Pórtland y los agregados. Con este proceso, se ahorra el costo de secar la escoria, y al moler en estado húmedo se obtiene una finura mayor que la producida por un molino de la misma potencia en un proceso seco.

En Inglaterra se utiliza una variante llamada Cemsave, que se conoce como Slagment en Sudáfrica; en este proceso, se agrega a la mezcladora escoria molida en seco, de la misma finura que el cemento, como sustitución parcial del cemento Pórtland; así, el concreto hecho con cemento de escoria de alto horno se elabora in situ. Igual que el concreto hecho con cemento de alto horno, el concreto hecho con Cemsave tiene una resistencia a corta edad más baja que cuando se usa sólo cemento Pórtland, pero a grandes edades se alcanza una resistencia por lo menos igual. Sin embargo, la trabajabilidad de Cemsave es un poco mayor, de modo que se puede reducir la relación agua / cemento más escoria, en

comparación con la relación agua / cemento de una mezcla de cemento Pórtland con el mismo contenido de agregados.

No se conoce con claridad la naturaleza exacta de la hidratación del cemento Pórtland de escoria de alto horno. Los componentes del cemento Pórtland se hidratan de manera normal, y se ha visto que el hidróxido de calcio liberado provoca un “inicio” para la hidratación de la escoria granular. Sin embargo, la hidratación posterior de la escoria es directa, y no depende de la combinación con la cal.

El cemento Pórtland de escoria de alto horno es bastante parecido al cemento Pórtland ordinario, en cuanto a finura, tiempo de fraguado y cambios en volumen. De hecho, la finura del cemento Pórtland de alto horno tiende a ser más alta, pero, a pesar de esto, la velocidad de endurecimiento de este cemento es ligeramente menor durante los primeros 28 días y, por tanto, reviste importancia un curado adecuado; por consiguiente, los requisitos de resistencia en las normas son más bajos que para el cemento Pórtland ordinario. Sin embargo, a edades posteriores hay poca diferencia entre las resistencias de ambos tipos de cemento.

El calor de hidratación del cemento Pórtland de escoria de alto horno es más bajo que el de cemento Pórtland ordinario, así que se puede usar en estructuras masivas de concreto. Sin embargo, en clima frío, el bajo calor de hidratación del cemento Pórtland de escoria de alto horno, aunado a su lento aumento de resistencia, puede facilitar los daños por congelamiento. Debido a que resiste bien los sulfatos, el cemento Pórtland de escoria de alto horno suele usarse en construcciones en agua de mar.

### **Cemento sobresulfatado.**

Este cemento se elabora con escoria granulada de alto horno, y por eso se describirá en esta sección aunque no es un cemento Pórtland.

El cemento sobresulfatado se fabrica al combinar una mezcla del 80% al 85% de escoria de hierro granulada con un 10% a 15% de sulfato de calcio (en forma de yeso completamente calcinado o anhidrita) y alrededor del 5% de escoria de cemento Pórtland.

El cemento sobresulfatado se usa mucho en Bélgica y en Francia, donde se conoce como ciment metallurgique sursulfaté, y en Alemania (bajo el nombre de Sulfathüttzement). Este cemento es muy resistente al agua de mar y puede soportar mayores concentraciones de sulfato de las que normalmente se encuentran en el agua freática y es, además, resistente a ácidos y aceites turbosos.

Se ha encontrado que el concreto de una relación agua / cemento no mayor de 0.45 no se deteriora al estar en contacto con soluciones débiles de ácidos minerales con pH de 3.5. Por estas razones, el cemento sobresulfatado se usa en la construcción de alcantarillas y en suelos contaminados, aunque se ha sugerido que este cemento es menos resistente que el cemento Pórtland resistente a sulfatos, cuando la concentración de sulfatos excede de 1%. El calor de hidratación del cemento sobresulfatado es bajo: alrededor de 170 a 190 J / g a los 7 días y 190 a 210 J / g a los 28 días. El cemento es, por lo tanto, adecuado para construcciones de concreto masivo, pero hay que tener cuidado en climas fríos, pues la velocidad de endurecimiento es muy pequeña a bajas temperaturas. La rapidez de aumento de resistencia del cemento sobresulfatado se incrementa con temperaturas de hasta 50°C, pero con temperaturas superiores se ha encontrado un comportamiento extraño. Por esta razón el curado a vapor arriba de 50°C no debe usarse sin pruebas previas. Conviene hacer notar que el cemento sobresulfatado no debe ser mezclado con otros cementos.

Es indispensable un curado húmedo de, por lo menos, 4 días después de la colocación del concreto, ya que el secado prematuro produce una superficie quebradiza o desmenuzable, sobre todo en climas cálidos, pero la profundidad de esta capa no aumenta con el tiempo.

El cemento sobresulfatado se combina químicamente con más agua de la necesaria para la hidratación del cemento Pórtland, de modo que el concreto con relaciones agua / cemento de menos de 0.4 no debe hacerse. Las mezclas con proporciones menores de 1:6 no son recomendables. La reducción en la resistencia, cuando se eleva la relación agua / cemento, es menor que en otros cementos, pero ya que el desarrollo de resistencia a corta edad depende del tipo de escoria usada en la manufactura del cemento es aconsejable determinar de antemano sus características reales de resistencia.



**Cementos Pórtland – puzolánico y puzolanas.**

El primero de éstos es el nombre dado a mezclas combinadas de cemento Pórtland y puzolanas.

La puzolana es un material natural o artificial que contiene sílice en una forma reactiva. Una definición más formal describe la puzolana como un material silicoso o sílico – aluminoso, el cual tiene poco o nulo valor cementante, pero en forma muy dividida y en presencia de humedad reacciona químicamente con hidróxido de calcio a temperaturas ordinarias para formar un compuesto con propiedades cementantes. Los materiales puzolánicos que más a menudo se encuentran son: ceniza volcánica (la puzolana original), pumicita, esquistos de opalina, tierras diatomeáceas calcinadas, arcilla quemada, ceniza volante, etc. Esta última se conoce también como ceniza combustible – pulverizada y es probablemente la puzolana artificial más común. Las partículas de la ceniza volátil son esféricas (lo cual es ventajoso desde el punto de vista de los requisitos de agua) y tienen aproximadamente la misma finura que el cemento, de modo que la sílice puede reaccionar fácilmente. Al hablar de puzolanas en general, conviene notar que la sílice debe ser amorfa, porque la sílice cristalina tiene reactividad muy baja.

No es posible enunciar una declaración general sobre los cementos Pórtland – puzolana, ya que el desarrollo de resistencia depende de la actividad de las puzolanas y de la proporción de cemento Pórtland en la mezcla. Por lo general, sin embargo, los cementos Pórtland – puzolana adquieren resistencia con mucha lentitud, y necesitan, por tanto, un período de curado mayor, pero su resistencia final es aproximadamente la misma que la del cemento Pórtland ordinario solo.

Las puzolanas son a menudo más baratas que el cemento Pórtland que reemplazan; pero su ventaja principal estriba en la hidratación lenta, y por tanto, en su bajo calor de hidratación; esto reviste gran importancia en construcción masiva, y es en estos casos donde más se usa el cemento Pórtland – puzolana o un reemplazo parcial de cemento Pórtland por puzolana.

Los cementos Pórtland – puzolana exhiben también una buena resistencia al ataque de sulfatos y algunos otros agentes destructivos. Debería recordarse sin embargo, que sus

efectos varían considerablemente, tanto para bien como para mal, y es recomendable probar cualquier material puzolánico del cual no se tenga experiencia, en combinación con el cemento y los agregados que se van a utilizar en la construcción.

Cuando se usan puzolanas como un reemplazo parcial del cemento, las puzolanas y el cemento se adicionan por separado, con los demás ingredientes, en la mezcladora de concreto.

El reemplazo parcial de cemento Pórtland por puzolana debe definirse cuidadosamente, ya que el peso específico de la puzolana es mucho menor que el del cemento; por ejemplo, el peso específico relativo de la ceniza volátil es de 2.1 a 2.4, comparada con 3.15 del cemento. Por tanto, un reemplazo por peso tiene como resultado un gran volumen de material cementante en la mezcla. Con el procedimiento de reemplazo, las mezclas de concreto tienen una resistencia temprana mayor que con el cemento Pórtland, pero después de tres meses no hay pérdida de resistencia. Con mezclas pobres, puede haber un aumento de resistencia a largo plazo debido al reemplazo. Si es preciso obtener igual resistencia temprana y se va a usar puzolana (por ejemplo debido a la reacción alcalina del agregado), entonces es necesario adicionar puzolana, en lugar de un reemplazo parcial del cemento. Por ejemplo, cuando se utiliza ceniza combustible pulverizada en mezclas pobres, puede ser necesario casi 100 Kg de puzolana para reemplazar 50 Kg de cemento, pero la cantidad de puzolana es menor en mezclas ricas. Como la continua formación de hidratos llena los poros y, además, no hay cal libre para formar poros, el reemplazo parcial de cemento Pórtland por puzolana reduce la permeabilidad del concreto: se ha observado una reducción de 7 a 10 veces.

Se debe recordar que aunque la puzolana pueda ser más barata que el cemento Pórtland, el uso de material adicional en la obra (sobre todo un material extremadamente fino) eleva el costo. Por eso, las puzolanas se usan más por razones técnicas que económicas.

### **Cemento blanco.**

En ocasiones se necesita concreto blanco para fines arquitectónicos o acabados con pintura de tono pastel, en regiones tropicales. Para lograr mejores resultados, es conveniente usar

cemento blanco con, desde luego, un agregado fino adecuado y si la superficie va a ser tratada también agregado grueso. Este tipo de cemento tiene además la ventaja de no causar manchas, debido a su bajo contenido de álcalis solubles.

El cemento Pórtland blanco está hecho de materia prima que contiene una pequeña cantidad de óxido de hierro y de manganeso. Suele usarse arcilla blanca o de China junto con una caliza libre de impurezas especificadas. Como combustible se utiliza petróleo para evitar la contaminación por la ceniza del carbón. Puesto que el fierro actúa como fundente en la obtención del clinker, su ausencia plantea la necesidad de mayores temperaturas, pero algunas veces se utiliza como fundente la criolita (fluoruro de aluminio sódico).

Es preciso evitar la contaminación del cemento con hierro mientras se muele. Por esta razón, se usa el método de molido con guijarros, que es bastante ineficiente, en vez del molido de bolas, aunque en fechas recientes se han introducido bolas de níquel y molibdeno. El costo de molido es alto, por lo tanto, y esto, aunado al costo de la materia prima, hace que el cemento blanco también sea caro (casi el doble que el cemento Pórtland ordinario).

Debido a esto el concreto con cemento blanco se usa a menudo para dar el acabado superficial, rellenando con concreto ordinario, pero se debe tener gran cuidado para asegurarse de la completa adherencia entre los dos concretos. Para obtener buen color blanco en el concreto, por lo general se usa una mezcla rica; la relación agua / cemento no debe ser mayor de alrededor de 0.4.

Cuando se requiere un color pastel, el concreto blanco puede usarse como mezcla para la pintura. También se pueden agregar pigmentos a la mezcladora, pero es indispensable que los pigmentos no afecten adversamente el desarrollo de resistencia ni la inclusión de aire. La mezcla del cemento con pigmentos no es común debido a que es más difícil mantener un color uniforme con el concreto resultante.

Para obtener concreto durable y uniforme de color, lo mejor es usar cemento coloreado; este consiste en la mezcla del cemento blanco con un 2% a 10% de pigmentos. Ya que el pigmento no es cementable, deberán usarse mezclas ligeramente más ricas.

El cemento blanco tiene un peso específico relativo un poco menor que el del cemento Pórtland ordinario, generalmente de 3.05 a 3.10. La resistencia del cemento Pórtland blanco suele ser menor que la del cemento Pórtland ordinario.

### **Otros cementos Pórtland.**

Entre los numerosos cementos desarrollados para usos especiales, reviste interés el cemento **antibacteriano** que previene la fermentación microbiológica. Esta acción bacteriana se encuentra en pisos de concreto de plantas procesadoras de alimentos donde los ácidos vulneran el cemento y lo vuelven permeable, lo cual va seguido por la fermentación causada por las bacterias al contacto con la humedad. El cemento antibacteriano resulta provechoso también en albercas, baños públicos, hospitales y lugares similares donde es común la presencia de bacterias u hongos.

Otro cemento especial es el **hidrofóbico**, que se deteriora muy poco a lo largo de períodos prolongados de almacenamiento en condiciones desfavorables. Este cemento se obtiene al mezclar cemento Pórtland con una proporción de 0.1% a 0.4% de ácido oleico. Pueden usarse también ácido esteárico o pentaclorofenol.<sup>9</sup>

Estas adiciones elevan la susceptibilidad a pulverizarse de la escoria, probablemente debido a las fuerzas electrostáticas resultantes de una orientación polar de las moléculas del ácido sobre la superficie de las partículas del cemento.

El ácido oleico reacciona con los álcalis del cemento para formar oleatos de calcio y de sodio, los cuales son efervescentes, de modo que resultan con aire incluido. Cuando esto no se desea, un agente exclusor como el fosfato de trinbutileno, puede agregarse durante el molido.<sup>10</sup>

Las propiedades hidrofóbicas se deben a la formación de una película repelente al agua alrededor de cada partícula de cemento. Esta partícula se rompe durante el mezclado del concreto, y se produce una hidratación normal, pero la resistencia a corta edad es más baja.

El cemento hidrofóbico tiene aspecto similar al cemento Pórtland ordinario, pero se caracteriza por un olor rancio. En el manejo, el cemento parece más fluido que otros cementos Pórtland.

El cemento hidrofóbico no debe confundirse con cementos impermeabilizados, de los cuales se afirma que producen un concreto más impermeable que el elaborado con cemento Pórtland ordinario. La efectividad de estos cementos impermeabilizantes aún es controvertida.

El **cemento de albañilería** usado en el mortero al trabajar con tabiques se elabora al mezclar cemento Pórtland muy fino, calizas y un agente excluidor de aire, o con otro procedimiento, cemento Pórtland y cal hidratada, escoria granular o un relleno inerte y un agente incluidor de aire. Los cementos de albañilería forman un mortero más plástico que el cemento Pórtland ordinario; además, tienen un gran poder de retener el agua, lo cual reduce la contracción. La resistencia de los cementos de albañilería es menor que la del cemento Pórtland ordinario, debido al alto contenido de aire incluido, pero esta baja resistencia es una ventaja en la construcción con tabiques. El cemento de albañilería no debe emplearse en concreto estructural.

### **Cementos naturales.**

Este es el nombre de un cemento obtenido de la calcinación y el molido de una roca que se llama roca cemento, una caliza arcillosa que tiene cerca del 25% de material arcilloso. El cemento resultante es similar al cemento Pórtland y en realidad es un producto intermedio entre el cemento Pórtland y la cal hidráulica.

Puesto que el cemento natural se calcina a temperaturas demasiado bajas, prácticamente no contiene silicato tricálcico ( $C_3S$ ) y, por tanto, es de endurecimiento lento. Los cementos naturales son más bien variables en calidad, ya que los ajustes de composición por mezclado no son posibles. Estas razones, agregadas a otras de tipo económico, explican que los cementos naturales se usan poco hoy en día.

### **Cementos expansivos.**

Para muchas finalidades, es ventajoso usar un cemento que no cambiara de volumen debido a la contracción por secado o que, en casos especiales, incluso se expanda durante el endurecimiento.

Algunos cementos de este tipo fueron desarrollados por H. Dossier en Francia, utilizando una mezcla de cemento Pórtland, un agente expansivo y un estabilizador. El agente expansivo se obtiene quemando una mezcla de yeso, bauxita y caliza, los cuales forman sulfato de calcio y aluminato de calcio.

En presencia del agua, estos componentes reaccionan para formar hidrato de sulfoaluminato de calcio (etringita) y producen una expansión de la pasta. El estabilizador, que es escoria de alto horno, capta lentamente el exceso de sulfato de calcio y pone fin a la expansión. Es preciso hacer un cuidadoso proporcionamiento de los ingredientes del cemento para obtener la expansión deseada. Generalmente, alrededor de 8 a 20 partes de clinker sulfoaluminado se mezclan con 100 partes de cemento Pórtland y 15 partes de estabilizador.<sup>11</sup>

Ya que la expansión tiene lugar sólo mientras el concreto está húmedo, el curado debe estar cuidadosamente controlado y el uso de cementos expansivos requiere experiencia y habilidad.

En un sentido estricto, el cemento expansivo no puede producir un concreto sin contracciones, ya que la contracción tiene lugar después de que el curado húmedo ha cesado, pero la magnitud de expansión puede ajustarse de modo que resulte igual numéricamente a la contracción subsecuente.

Otro tipo de cemento expansivo, llamado cemento expansivo de alta energía, se elabora con la mezcla de escoria de cemento Pórtland, clinker de cemento aluminoso y yeso, aproximadamente en las proporciones 65:20:15. La expansión se debe a la formación de sulfoaluminato de calcio, como en el cemento de Dossier, y sucede durante 2 ó 3 días después de la colocación del concreto.

El cemento de alta energía fragua y endurece rápidamente y alcanza una resistencia de aproximadamente  $7 \text{ MN} / \text{m}^2$  ( $70 \text{ Kg}_f / \text{cm}^2$ ) en 6 horas y  $50 \text{ MN} / \text{m}^2$  ( $490 \text{ Kg}_f / \text{cm}^2$ ) a los 28 días. Este cemento posee gran resistencia a los ataques de sulfatos.

Un descubrimiento más reciente que goza de más uso comercial, es el cemento expansivo conocido como Tipo K, elaborado en California. Los ingredientes de este cemento son similares a los usados por Dossier, pero la selección del material y las condiciones del

proceso de la escoria (temperaturas máximas de alrededor de 1300°C) del agente expansivo, probablemente causen la formación de un sulfoaluminato de calcio anhidro ( $C_4A_3SO_3$ ). La expansión se debe a la formación de sulfoaluminato de calcio hidratado (etringita), como en el cemento de Dossier, pero la rapidez y la magnitud de las expansiones parecen ser más confiables. Se fabrica un cemento similar en Japón.

Los concretos hechos con cementos expansivos han sido clasificados por el American Concrete Institute.<sup>12</sup> Se reconocen tipos básicos; el **concreto de contracción compensada**, en el que al restringir la expansión se inducen esfuerzos de compresión que aproximadamente cancelan los esfuerzos de tensión inducidos por la contracción. El **concreto autoesforzante** tiene la propiedad de que los esfuerzos de compresión inducidos son suficientes para conservar esfuerzos de compresión significativos después de que la contracción en seco ha ocurrido. Sin duda, en ambas definiciones interviene una limitación de la expansión, casi siempre en la forma de refuerzo de preferencia triaxial. En realidad, lo importante no es la expansión, sino los esfuerzos de compresión inducidos, que pueden compensar los esfuerzos de tensión, que de lo contrario, podrían manifestarse como efectos de tensión e incluso como grietas.

En escala limitada, se ha encontrado que el comportamiento de estos concretos es alentador y existen buenas posibilidades para presforzar concreto mediante cementos expansivos. Sin embargo, su aplicación amplia necesita de nuevos progresos.

### **Cemento aluminoso.**

Al buscar una solución al problema de ataques de aguas portadoras de yeso a estructuras de concreto de cemento Pórtland en Francia, Jules Bied desarrolló un cemento de alto contenido de aluminio, a principios del siglo XX. Este cemento difiere mucho en composición y también en algunas propiedades de los cementos Pórtland, así que no se profundizará más en la fabricación de este tipo de cemento (que por cierto es similar a la del cemento Pórtland).

En este capítulo, se ha documentado al lector sobre las propiedades de los cementos Pórtland, que son más interesantes en la fabricación de concreto estructural. En el capítulo siguiente se introducirá al lector en el mundo de los polímeros, pero principalmente, se le enfocará a su uso como material cementante para la elaboración de concretos de alta resistencia.

### **Referencias de este capítulo.**

1. Tecnología del Concreto. A. M. Neville. IMCYC (Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto).
2. Cement and Concrete. F. M. Lea. Cambridge, W. Heffer and Sons.
3. Chemistry of Portland Cement. R. H. Bogue. New Cork, Reinhold.
4. Hardened concrete – pore structure. A. S. T. M. (American Society for Testing and Materials).
5. Nuclear magnetic resonance studies of the water in hardened cement paste. P. eligmann. Research and Development Laboratories of J. Portl. Cem. Assoc.
6. Correlation of methods for measuring heat of hydration of cement. R. W. Carlson and L. R. Forbrick. Industrial and Engineering Chemistry (Analytical Edition).
7. Long Time study of cement performance in concrete. W. Lerch and C. L. Ford. Chemical and physical tests of the cements, ACI (American Concrete Institute).
8. Changes in Characteristics of Portland cement as exhibited by laboratory tests over the period 1904 – 1950. H. F. Gonnerman and W. Lerch. ASTM.
9. Hydrophobic Cement. R. W. Nurse. Cement and Lime Manufacture.
10. Hydrophobic Cement. U. W. Stoll. ASTM.



11. The Chemistry of Cement and Concrete. F. M. Lea. Londres, Arnold.

12. Expansive Cement Concretes. Committee 223. ACI.

## CAPÍTULO 2: LOS POLÍMEROS.

Desde los principios de la era moderna de la química en el siglo XIX, uno de los objetivos importantes de las investigaciones en química ha sido el descubrimiento y desarrollo de materiales con propiedades útiles. Los químicos han inventado sustancias y también formas de procesar materiales naturales para elaborar fibras, películas, recubrimientos, adhesivos y sustancias con propiedades eléctricas, magnéticas u ópticas especiales. Hoy en día hemos ingresado en una nueva era en la que los avances de la tecnología dependen más que nunca del descubrimiento y desarrollo de nuevos materiales útiles. He aquí algunos ejemplos de cómo tales materiales afectarán todos los aspectos de nuestra vida en el futuro cercano:

- Las pantallas planas sustituirán a los tubos de rayos catódicos que actualmente se emplean en los televisores y monitores de computadora.
- Dispositivos tan pequeños que por sus dimensiones se miden en nanómetros almacenarán enormes cantidades de información en un volumen muy reducido. Tal almacenamiento de información de alta densidad ya es posible, aunque todavía no está listo para un uso generalizado.
- La duración esperada de las prótesis biológicas, como las articulaciones de rodilla y de cadera, se prolongará, de los 10 años o menos que tienen actualmente, a toda la vida del paciente.
- Nuevos diseños de baterías y celdas de combustible que harán posible el advenimiento del automóvil eléctrico.
- Convertidores catalíticos que reducirán de forma más efectiva la contaminación creada por los automóviles, contribuirán a mejorar el ambiente con un costo menor.

En este capítulo estudiaremos las propiedades y aplicaciones de los polímeros.

Nuestro objetivo es comprobar que “las propiedades observables de los materiales son el resultado de estructuras y procesos en los niveles atómico y molecular”<sup>1</sup>.

En la naturaleza se encuentran muchas sustancias con una masa molecular muy alta que puede llegar a millones de unidades de masa atómica.

El almidón y la celulosa abundan en las plantas; las proteínas y los ácidos nucleicos se encuentran tanto en plantas como en animales. En 1827 Jons Jacob Berzelius<sup>1</sup> acuñó el término **polímero** (del griego *polys*, “muchos” y *meros* “partes”) para denotar las sustancias moleculares de alta masa molecular formadas por la *polimerización* (unión) de **monómeros**, moléculas con baja masa molecular.

Desde hace mucho tiempo, los seres humanos hemos utilizado polímeros naturales para formar materiales útiles. El hilado de lana, el curtido del cuero y la fabricación de hule natural son ejemplos del procesamiento de polímeros naturales.

Durante los últimos sesenta años, aproximadamente, los químicos han aprendido a crear polímeros sintéticos polimerizando monómeros mediante reacciones químicas controladas.

Uno de los químicos que más ha aportado a este campo es el químico estadounidense Paul J. Flory, quien fue galardonado con el premio Nobel de Química en 1974, por sus importantes investigaciones sobre polímeros y otras macromoléculas.<sup>3</sup>



Muchos de estos polímeros sintéticos tienen una columna vertebral de enlaces carbono – carbono. Los átomos de carbono tienen una capacidad excepcional para formar enlaces fuertes y estables entre sí.

El ejemplo más sencillo de reacción de polimerización es la formación de **polietileno** a partir de moléculas de etileno. En esta reacción, el doble enlace de la molécula de etileno se

“abre”, y dos de los electrones que originalmente participaban en el enlace se utilizan para formar nuevos enlaces sencillos C – C con otras dos moléculas de etileno:

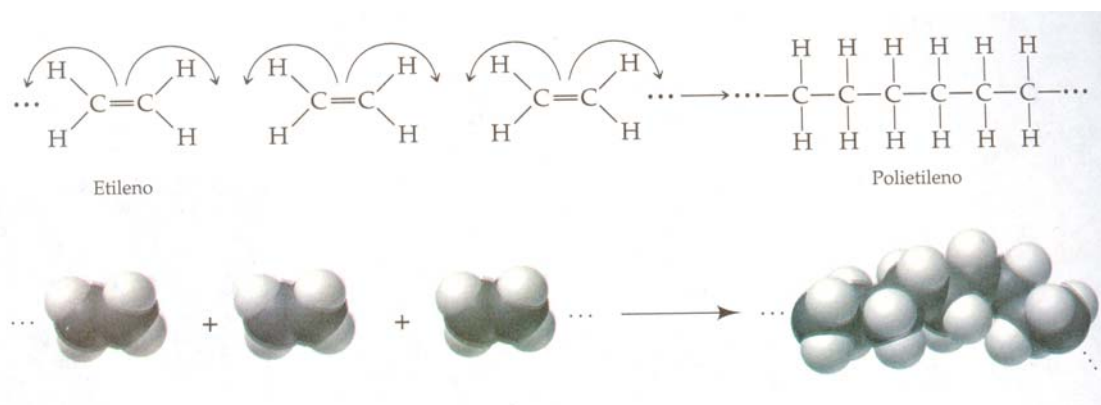
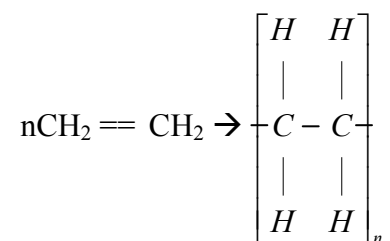


Figura 2.1

La polimerización que ocurre gracias al acoplamiento de monómeros utilizando sus enlaces múltiples se denomina **polimerización por adición**.

Una reacción de polimerización se puede escribir así:

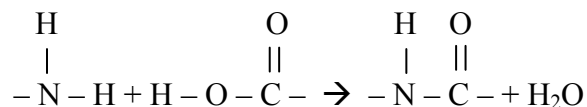


Aquí, la letra  $n$  es el número grande (que va desde cientos hasta miles) de moléculas de monómero (etileno en este ejemplo) que reaccionan para formar una molécula grande del polímero. Dentro del polímero aparece una unidad de repetición (la unidad encerrada entre corchetes) a lo largo de toda la cadena. Los extremos de la cadena terminan en enlaces carbono – hidrógeno o en algún otro tipo de enlace, de modo que los carbonos finales tengan cuatro enlaces.

El polietileno es un material muy importante; en Estados Unidos se producen más de nueve millones de toneladas al año. Aunque la fórmula del polietileno es la más sencilla de todos los polímeros orgánicos, no se forma fácilmente a partir del etileno. Se requirieron muchos años de investigación para identificar las condiciones y los catalizadores apropiados para

fabricar un polímero comercialmente útil. Hoy día se conocen muchas formas distintas de polietileno que varían ampliamente en sus propiedades físicas. Los polímeros con otras composiciones químicas ofrecen una variedad aún más amplia de propiedades químicas y físicas.

Un segundo tipo general de reacción que sirve para sintetizar polímeros con importancia comercial es la **polimerización por condensación**. En una reacción por condensación, dos moléculas se unen para formar una molécula más grande, por eliminación de una molécula pequeña, como H<sub>2</sub>O. Por ejemplo, una amina (un compuesto que contiene el grupo – NH<sub>2</sub>) reacciona con un ácido carboxílico (un compuesto que contiene el grupo – COOH) para formar un enlace entre N y C con formación de H<sub>2</sub>O:



En la formación del nailon, una diamina (un compuesto con un grupo – NH<sub>2</sub> en cada extremo) se hace reaccionar con un ácido (un compuesto con un grupo – COOH) en cada extremo. Por ejemplo, el nailon 6,6 que es un tipo específico de nailon, se forma cuando una diamina que tiene seis átomos de carbono y un grupo amino en cada extremo se hace reaccionar con ácido atípico, que también tiene seis átomos de carbono. Ocurre una reacción de condensación en cada extremo de la diamina y del ácido. Se elimina una molécula de H<sub>2</sub>O y se forman enlaces N – C entre las moléculas.

Es importante observar que en las polimerizaciones por condensación tienen columnas vertebrales de átomos de nitrógeno y oxígeno, además de átomos de carbono.

### **Tipos de polímeros.**

El polietileno y el nailon son materiales muy importantes. En Estados Unidos se producen más de nueve millones de toneladas de polietileno al año. Aunque la fórmula del polietileno es la más sencilla de todos los polímeros orgánicos, no se forma fácilmente a partir del etileno. Se requirieron muchos años de investigación para identificar las condiciones y los catalizadores apropiados para fabricar un polímero comercialmente útil. Hoy día se conocen muchas formas distintas de polietileno que varían ampliamente en sus propiedades

físicas. Los polímeros con otras composiciones químicas ofrecen una variedad aún más amplia de propiedades químicas y físicas. En la tabla siguiente, se listan varios polímeros comunes que se obtienen mediante polimerización **por adición** y **por condensación**.

<b>Polímeros de adición</b>	<b>Usos</b>	<b>Cantidad (10<sup>9</sup> Ton / año) <sup>2</sup></b>
Polietileno	Películas, empaques, botellas.	10.4
Polipropileno	Utensilios de cocina, fibras, aparatos domésticos.	4.3
Poliestireno	Empaque, recipientes desechables para alimentos, aislamiento.	2.6
Cloruro de polivinilo (PVC)	Empalmes de tuberías, película transparente para empacar carnes.	5
<b>Polímeros de condensación.</b>	<b>Usos</b>	<b>Cantidad (10<sup>9</sup> Ton / año) <sup>2</sup></b>
Poliuretano	Relleno de “espuma” para muebles, aislamiento aplicado por aspersión, partes de automóviles, calzado, recubrimientos impermeables al agua.	0.7
Poliétilentereftalato (PET) (un poliéster)	Cuerdas para neumáticos, cintas magnéticas, ropa, botellas para bebidas.	1.7 (todos los poliésteres)
Nailon 6,6	Muebles y cortinas, ropa, fibras para alfombra, sedal para pescar.	1.2 (todos los nailons)

Tabla 2.1

Por lo que se ha visto, existen muchos tipos de polímeros y debemos aclarar el significado de algunos términos de uso común. La palabra **plástico** se aplica por lo general a materiales que se pueden moldear para darles diversas formas, por lo regular mediante la aplicación de

presión y calor. Los materiales **termoplásticos** pueden volverse a moldear. Por ejemplo, los recipientes de plástico para leche están hechos de polietileno de alta masa molecular. Estos recipientes pueden fundirse y el polímero se puede reciclar para darle algún otro uso. En cambio, un **plástico termofijo** se moldea mediante procesos químicos irreversibles y por tanto no puede volverse a moldear fácilmente.

El término **elastómero** se aplica a un material que exhibe un comportamiento elástico parecido al del hule. Cuando un elastómero se somete a estiramiento o flexión, recupera su forma original una vez que se retira la fuerza distorsionada, siempre que no se haya deformado más allá de cierto límite elástico. Algunos polímeros, como el nailon y los poliésteres, también pueden moldearse en fibras que, al igual que el pelo, son muy largas en relación con su área transversal y no son elásticas. Estas fibras pueden tejerse para formar telas o cordeles y producir ropa, cuerdas para neumáticos y otros objetos útiles.

### **Estructuras y propiedades físicas de los polímeros.**

Las sencillas fórmulas estructurales que se dan para el polietileno y otros polímeros son engañosas. Puesto que cada átomo de carbono del polietileno está rodeado de cuatro enlaces, los átomos están dispuestos en tetraedros, así que la cadena no es recta como se ha representado en la Figura 2.1. Además, los átomos están relativamente libres para girar alrededor de los enlaces C – C sencillos ( $\sigma$ ). Así, en lugar de ser rectas rígidas, las cadenas son muy flexibles y se pliegan fácilmente. La flexibilidad de las cadenas moleculares hace que el material polimérico sea muy flexible.



Figura 2.2

Los polímeros son, en gran parte, materiales amorfos (no cristalinos). En lugar de exhibir fases cristalinas bien definidas con puntos de fusión definidos, los polímeros se reblandecen dentro de un intervalo de temperaturas. No obstante, los polímeros pueden poseer un orden de corto alcance en las regiones del sólido, con cadenas alineadas en arreglos regulares. El grado de tal ordenamiento se describe con el **grado de cristalinidad** del polímero. En muchos casos, la cristalinidad de un polímero se puede elevar mediante estirado mecánico o tensión para alinear las cadenas mientras el polímero fundido se estira a través de agujeros pequeños. Las fuerzas intermoleculares entre las cadenas de polímeros mantienen unidas las cadenas en las regiones cristalinas ordenadas, y esto hace al polímero más denso, más duro, menos soluble y más resistente al calor. En la tabla siguiente se muestra la forma en que cambian las propiedades del polietileno al aumentar el grado de cristalinidad.

Cristalinidad					
	55%	62%	70%	77%	85%
Punto de fusión (°C)	109	116	125	130	133
Densidad (g / cm <sup>3</sup> )	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96
Módulo de Elasticidad (psi)	0.025	0.047	0.075	0.120	0.165
Límite elástico (psi)	1700	2500	3300	4200	5100

Tabla 2.2

La sencilla estructura lineal del polietileno facilita las interacciones intermoleculares que dan lugar a la cristalinidad. Sin embargo, el grado de cristalinidad en el polietileno depende mucho de la masa molecular media. La polimerización produce una mezcla de **macromoléculas** (moléculas grandes) con  $n$  variable y, por ende, masa molecular variable. El llamado polietileno de baja densidad que se usa para moldear películas y láminas tiene una masa molecular media del orden de  $10^4$  una y presenta una ramificación sustancial de



las cadenas; es decir, hay cadenas laterales que salen de la cadena principal del polímero, parecidas a los ramales que divergen de una línea férrea principal. Estas ramas inhiben la formación de regiones cristalinas y así reducen la densidad del material. El polietileno de alta densidad, que se usa para moldear botellas, otros recipientes y tubos, tiene una masa molecular media del orden de  $10^6$  uma. Esta forma tiene menos ramificación, y por tanto, un mayor grado de cristalinidad.

Las propiedades de los materiales poliméricos se pueden modificar ampliamente por la adición de sustancias de menor masa molecular. Por ejemplo, es posible agregar sustancias que protejan al material contra la degradación causada por la luz solar. En otros casos se agregan **plastificantes** para reducir las interacciones entre las cadenas y así hacer más flexible el polímero. Por ejemplo, el cloruro de polivinilo (PVC) (Tabla 3.1) es un material duro y rígido con alta masa molecular que se utiliza para fabricar tubos de drenaje para casas. Sin embargo, si el PVC se combina con una sustancia adecuada de más bajo peso molecular, forma un polímero flexible que puede servir para fabricar botas impermeables y piezas de muñecas. En algunas aplicaciones el plastificante de un objeto de plástico se puede perder por evaporación. Si esto sucede, el plástico pierde su flexibilidad y se hace propenso a agrietarse.

### **Enlaces cruzados en los polímeros.**

Es posible hacer más rígidos los polímeros introduciendo enlaces químicos entre las cadenas poliméricas. La formación de enlaces entre las cadenas se denomina **entrecruzamiento**. Cuanto mayor sea el número de entrecruzamientos de un polímero, más rígido será el material. Mientras que los materiales termoplásticos consisten en cadenas poliméricas independientes, los termofijos forman enlaces cruzados al calentarse y por ello conservan su forma.

Un ejemplo importante de entrecruzamiento es la **vulcanización** del hule natural, proceso descubierto por Charles Goodyear en 1839<sup>1</sup>. El hule natural se forma a partir de una resina líquida obtenida de la corteza interior del árbol *Hevea brasiliensis*. Químicamente, el hule es un polímero del isopreno  $C_5H_8$ . Dado que en este polímero no es fácil que ocurra una rotación alrededor del doble enlace  $C = C$ , la orientación de los grupos unidos a los

carbonos es rígida. En el hule natural, las extensiones de las cadenas ocurren en el mismo lado del doble enlace. Esta forma se llama *cis-poliisopreno*; el prefijo *cis* proviene de una frase latina que significa “de este lado”<sup>3</sup>.

El hule natural no es un plástico útil porque es demasiado blando y demasiado reactivo químicamente. Goodyear descubrió accidentalmente que, si se agrega azufre al hule y luego se calienta la mezcla, el hule se vuelve más duro y menos susceptible a la oxidación u otro ataque químico. El azufre convierte el hule en un polímero termofijo entrecruzando las cadenas poliméricas mediante reacciones en algunos de los dobles enlaces. Un entrecruzamiento de cerca del 5% de los dobles enlaces crea un hule flexible y elástico. Cuando el hule se estira, los enlaces cruzados ayudan a evitar que las cadenas resbalen, y el hule conserva su elasticidad.

Un ejemplo adicional de entrecruzamiento se observa en el polímero formado por la melamina y el formaldehído. Este entrecruzamiento se extiende en tres dimensiones y crea un material duro, rígido y químicamente estable. Esta clase de polímeros termofijos se encuentra en productos como vajillas, recubrimientos y mesas de formica.

Hoy día los polímeros tienen aplicaciones que nadie imaginaba en el momento de su descubrimiento. Por ejemplo, el nailon no se utiliza sólo como fibra, que fue su aplicación inicial; también se utiliza en la fabricación de cojinetes, aislantes, sedal para pescar y cuerdas para neumáticos. Estas aplicaciones extendidas del nailon y otros polímeros han estimulado una fuerte demanda por nuevas “súper fibras” con la resistencia al calor del asbesto, la rigidez del vidrio y resistencia mucho mayor que la del acero.

Una nueva sustancia que posee muchas de esas propiedades se llama **Kevlar** que tiene una masa molecular media por cadena polimérica de  $10^5$  uma. El kevlar debe sus propiedades tan especiales a la forma en que interactúan las moléculas del polímero: las cadenas individuales están unidas por puentes de hidrógeno a las cadenas adyacentes. Esta red de puentes de hidrógeno hace que las moléculas se alineen y formen una estructura de lámina.

El kevlar tiene muchas propiedades excepcionales en virtud de los fuertes enlaces en las cadenas de polímero individuales, la fuerte red de puentes de hidrógeno en las láminas, y la

disposición regular de las láminas en las fibras. Las cuerdas de kevlar han sustituido a las cuerdas y cables de acero en muchas aplicaciones, sobre todo en las plataformas petroleras marinas. Las cuerdas de kevlar en el agua de mar tienen 20 veces la resistencia del acero. El kevlar también se utiliza en la fabricación de chalecos a prueba de balas y esquís de alto rendimiento. Al ser muy estable a altas temperaturas, el kevlar se emplea en la ropa protectora que usan los bomberos.

### **Reciclaje de plásticos.**

Si se examina la base de un recipiente de plástico, es probable que se descubra un símbolo de reciclar que contiene un número. El número que está dentro del símbolo de reciclar, y el símbolo que está abajo, indican el tipo de polímero con que está hecho el recipiente, según el resumen de la tabla siguiente.

Categorías empleadas para reciclar materiales poliméricos en Estados Unidos		
Número	Abreviatura	Polímero
1	<b>PET</b>	Polietilentereftalato
2	HDPE	Polietileno de alta densidad
3	V	Cloruro de polivinilo (PVC)
4	LDPE	Polietileno de baja densidad
5	PP	Polipropileno
6	<b>PS</b>	Poliestireno
7		Otros

Tabla 2.3

Estos símbolos permiten separar los recipientes según su composición. En general, cuanto más bajo sea el número, mayor será la facilidad con que el material puede reciclarse posteriormente.

En esta tesis se habla de un polímero que se obtiene del reciclo de botellas hechas de polietilentereftalato (PET). Este polímero de condensación consiste en cadenas muy largas compuestas por cientos de unidades de monómeros a base de carbono, hidrógeno y oxígeno:

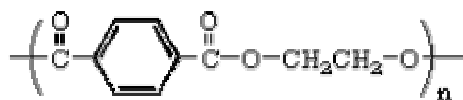


Figura 2.3

A pesar de ser considerado no tóxico, potencialmente representa un peligro si no es desechado de manera adecuada. Aparte de ocupar espacio en los rellenos municipales, si es incinerado puede producir sustancias sumamente tóxicas, como por ejemplo dioxinas.

Actualmente, muchos plásticos son reciclados físicamente, para ello, generalmente son recolectados, lavados y molidos. Una vez molidos se les funde y da la forma que se desee para su nueva aplicación. Este proceso es relativamente sencillo, pero no puede aplicarse a todos los plásticos ni realizarse numerosas veces, los plásticos reciclados son de menor calidad que el material virgen. Cada vez que el material es reciclado sufre un proceso de degradación que disminuye sus propiedades. Además, el reciclaje físico requiere que el material se encuentre libre de impurezas y contaminación, no sólo de sustancias tóxicas o peligrosas, sino también de otros plásticos o materiales. Este es uno de los inconvenientes más grandes para lograr un buen reciclaje físico, la separación de los materiales.

Otra alternativa es el reciclaje químico, el cual, a diferencia del físico, implica cambios en la estructura química del material. El reciclaje químico, al basarse en una reacción química específica, no necesita los complicados pasos de purificación que son indispensables para el reciclaje físico. Por añadidura, el reciclaje químico permite utilizar al desecho plástico como fuente de materia prima, no sólo para producir nuevamente el material original, sino producir otros materiales con diferentes características.

Debido a su amplio uso, existe un creciente interés por aprovechar los desechos de PET. Una alternativa es reciclar químicamente este plástico desechado para fabricar un material con aplicación en el campo de la construcción. En resumen, la idea es descomponer químicamente el PET, es decir, romper la cadena para obtener sus eslabones separados. Estos eslabones son utilizados para formar una nueva cadena que tiene la particularidad de poseer algunos eslabones que pueden unirse a otros tres (en vez de sólo a dos). Esta nueva cadena se llama poliéster insaturado. Esta nueva característica del poliéster insaturado hace que todas las cadenas puedan unirse, formando una especie de red tridimensional (este proceso de unión de cadenas se conoce como entrecruzamiento o curado). El resultado es una estructura o matriz muy grande, interconectada y muy fuerte.

Si esta matriz es rellena con arena y grava, el producto resultante es un concreto polimérico, ya que la pasta de agua – cemento es sustituida por el polímero obtenido del reciclo de PET.

Enseguida se describe la forma en la que el Profesor Nakamatsu<sup>4</sup> obtuvo por primera vez el concreto polimérico PET.

Para la depolimerización (la separación de los eslabones de las cadenas de PET) se probaron diferentes glicoles (alcoholes con dos grupos funcionales OH) en presencia de varios catalizadores. La segunda etapa consistió en producir el poliéster insaturado agregando al producto de la depolimerización otras moléculas. La variación de las proporciones de las moléculas que constituyen el poliéster se reflejó en las propiedades del concreto polimérico final, las cuales fueron estudiadas por medio de pruebas de resistencia similares a las utilizadas para evaluar concreto convencional.

Depolimerización del PET.- El PET, previamente cortado en trozos de aproximadamente  $1\text{ cm}^2$  y calentado a  $100^\circ\text{C}$  durante tres horas, se hizo reaccionar con etilenglicol (8 ml por cada gramo de PET) en un balón acoplado a un reflujo bajo atmósfera inerte, en presencia de un catalizador. El producto de la reacción se dejó enfriar y se filtró y lavó con agua destilada. El producto, bis(hidroxietileno)tereftalato (BHET), se recristalizó en agua caliente.

Polimerización del poliéster insaturado.- En un balón acoplado a un destilador se hizo reaccionar el BHET con anhídrido maleico, ácido sebácico y un glicol (etilenglicol, propilenglicol o dietilenglicol), en atmósfera inerte. La temperatura de reacción fue inicialmente de 90°C y se incrementó progresivamente a 120°, 190° y 220° sucesivamente, manteniéndose cada una de estas temperaturas por 30 minutos, excepto la última, que se mantuvo durante una hora.

Elaboración del concreto polimérico.- El poliéster insaturado se mezcló con estireno (en diferentes proporciones), y luego con arena en proporción: 8 arena, 1 mezcla de poliéster y estireno. A esta mezcla se le añadió octoato de cobalto y peróxido de metil etil cetona para producir el entrecruzamiento. El concreto se dejó reaccionar a temperatura ambiente (o a mayores temperaturas si se desea acelerar el proceso).

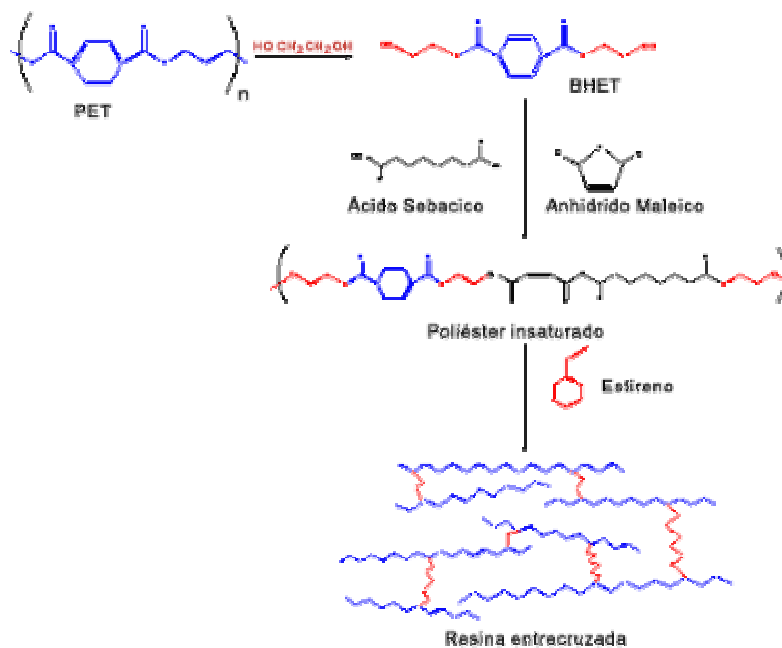


Figura 2.4

La figura anterior resume el proceso general:

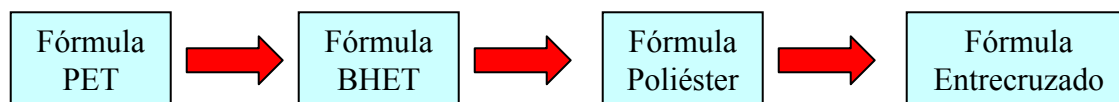


Figura 2.5

En este capítulo se ha dado la información necesaria al lector para que pueda entender claramente cómo se usa un polímero en la fabricación de concreto de alta resistencia.

En los capítulos 3 y 4, se expondrán brevemente las técnicas de fabricación y las propiedades de los concretos, usando cemento Pórtland y Polímeros, respectivamente.

Es importante aclarar que la brevedad de los capítulos 2 y 4, comparados con los capítulos 1 y 3, se debe a que la información con la que se cuenta en la industria del cemento Pórtland es mucho más extensa que la correspondiente a los materiales poliméricos usados para fabricar concreto, sobre todo en el aspecto de la medida de su tenacidad.

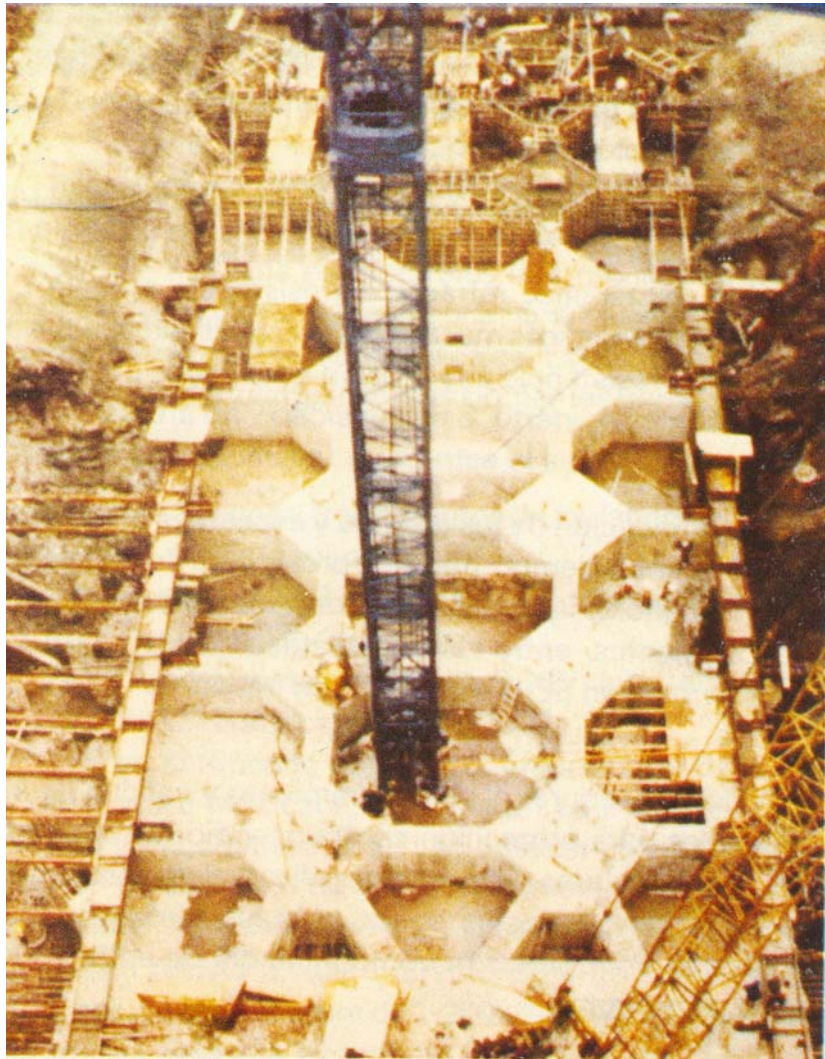
#### **Referencias de este capítulo.**

1. Brown. LeMay Bursten. Química, la ciencia central. Pearson.
2. Chemical and Engineering News, 26 de junio de 1995, pág. 42
3. Enciclopedia Encarta. Microsoft.
4. Concreto Polimérico a partir de Botellas Descartables. Jorge Chávez, Roberto Laos, Carla Rospigliosi, Javier Nakamatsu.  
[http://www.pucp.edu.pe/invest/conciencia/numero1/cientif\\_reci.htm](http://www.pucp.edu.pe/invest/conciencia/numero1/cientif_reci.htm)

## CAPÍTULO 3: EL CONCRETO ELABORADO CON CEMENTO PÓRTLAND.

La utilización de concreto elaborado con cemento Pórtland abarca un amplio campo en estructuras de diversos tipos y tamaños, diseñadas para usos distintos y expuestas a muy variadas acciones.

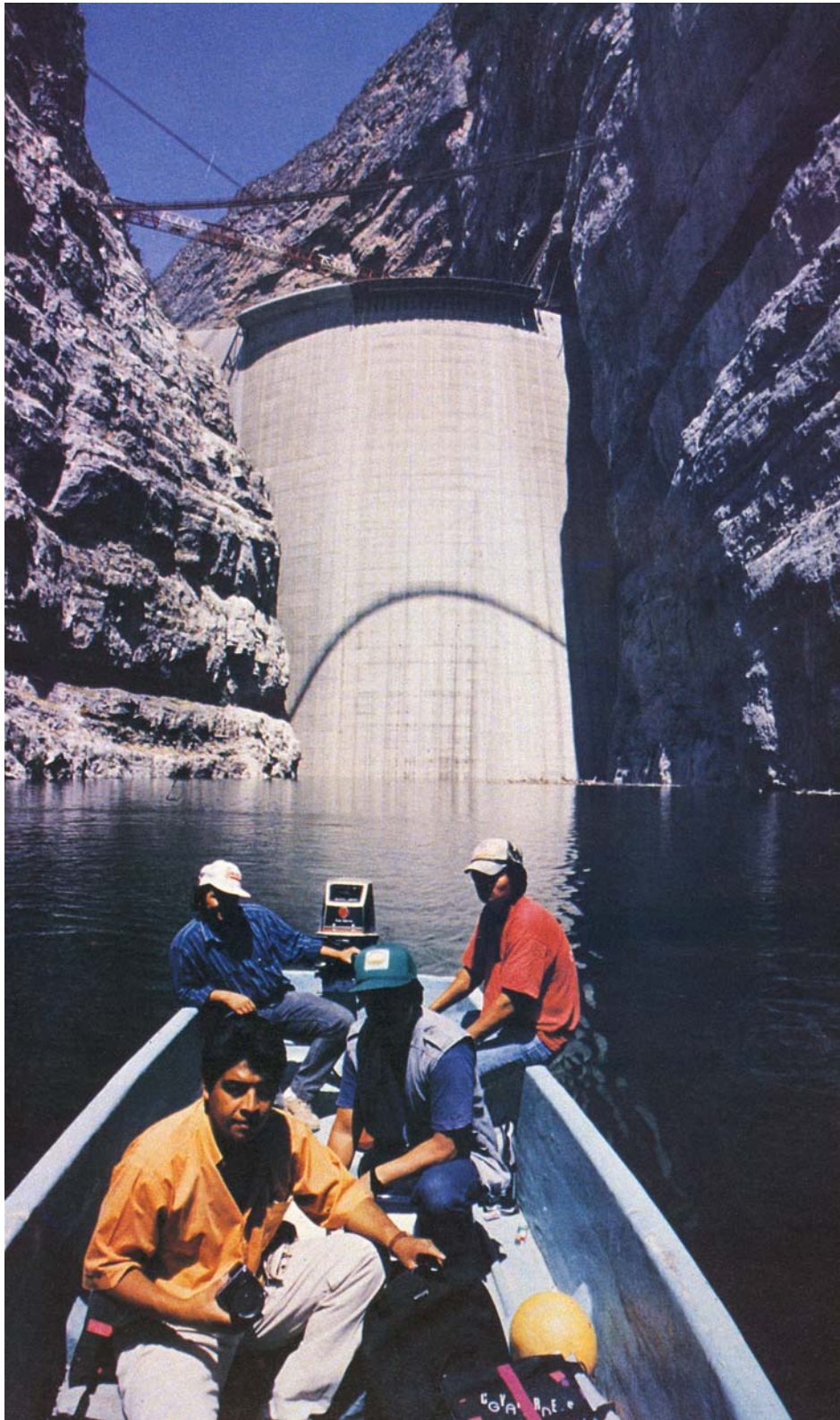
He aquí algunos ejemplos:



Vista aérea de la cimentación de la Torre de PEMEX <sup>1</sup>

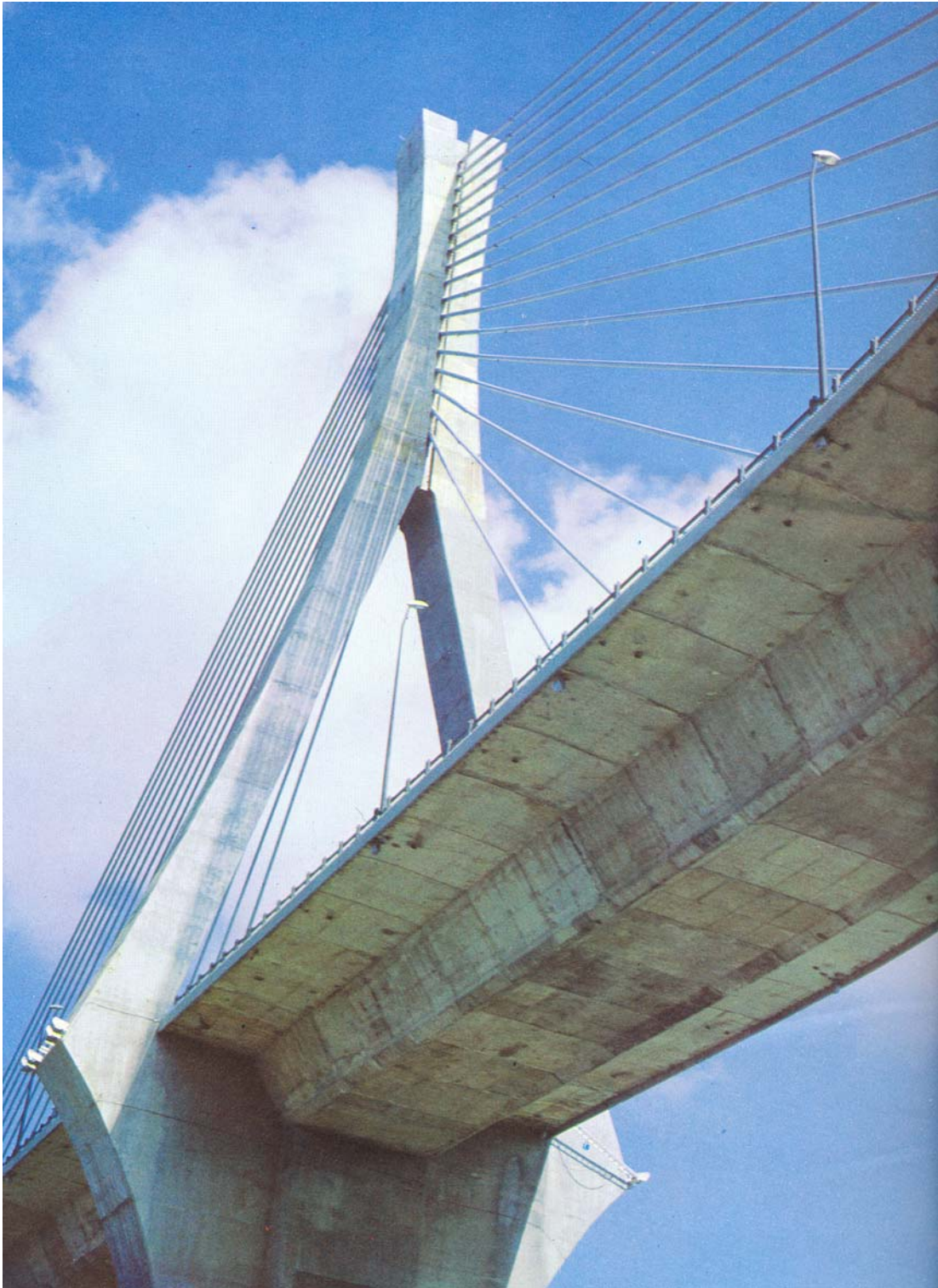
Fernando Pérez Godínez





Vista de la presa de Zimapán <sup>2</sup>

Fernando Pérez Godínez



Vista del puente Coatzacoalcos II <sup>3</sup>

Fernando Pérez Godínez

En la introducción, se dio la siguiente definición para el concreto: “El concreto es un material compuesto por un agregado fino, uno grueso y un aglutinante líquido que reacciona con los agregados, de esta manera se obtiene un material sólido de alta resistencia a la compresión, gran durabilidad, baja resistencia a la tensión y de falla frágil”. Esta definición es válida para este capítulo, si el aglutinante líquido está formado por una pasta de agua y cemento Pórtland.

Los cementos utilizados provienen de fábricas diferentes y pueden responder a varios tipos de especificaciones, según se trató en el Capítulo 1. Los agregados son de muchas clases y se extraen de innumerables fuentes. Los tamaños deseados o disponibles varían desde los de las arenas naturales y trituradas hasta los de canto rodado y rocas fraccionadas de 10 a 15 cm, o aún mayores (en el **concreto ciclópeo**). El problema de la dosificación de las mezclas consiste en seleccionar de las fuentes aprovechables y de la combinación de materiales que producen, en la forma más económica, el concreto que mejor se apegue a los requisitos de una obra determinada.

La selección de las proporciones que se usaron en los albores del concreto era muy arbitraria y los resultados fueron más o menos casuales. Con el descubrimiento de la función primordial de la relación agua / cemento y el desarrollo de equipos para el proceso de agregados, mezclado y manejo de grandes volúmenes de concreto y con el mejoramiento de los cementos, la tecnología del concreto elaborado con cemento Pórtland ha avanzado hasta el punto de poder dosificar las mezclas, es decir, se ha logrado determinar las proporciones de ingredientes que cumplan las exigencias de cualquiera de las diversas aplicaciones del concreto.

El advenimiento de la inclusión de aire en la tecnología del concreto, ha sido un avance comparable con la declaración del efecto que ejerce el control de la relación agua-cemento con la resistencia del concreto. La inclusión de aire no sólo ha suministrado una base para controlar la resistencia a la acción del congelamiento, sino que ha tomado también un sitio importante entre los principales factores que influyen en la trabajabilidad del concreto elaborado con cemento Pórtland.

El objeto de este capítulo es exponer los principios básicos y los procedimientos lógicos para dosificar las mezclas de concreto elaborado con cemento Pórtland.

Estos principios y procedimientos están en todo de acuerdo con la Práctica recomendada para la Selección de Proporciones para Concreto del Comité 211 del American Concrete Institute.

El problema primordial en el proporcionamiento del concreto consiste en encontrar la combinación de cemento Pórtland y agregados que satisfaga al máximo posible las exigencias de una estructura determinada o de una serie de estructuras.

Los principales factores que deben ser considerados son:

- Los requisitos concernientes a la colocación.
- Las interrelaciones entre el contenido de cemento Pórtland, la relación agua / cemento, la granulometría de los agregados y la cantidad total de agua por unidad de volumen.
- La resistencia requerida.
- La calidad necesaria del concreto para resistir las condiciones a las que estará expuesto.
- Consideraciones económicas.

Primero se tratará lo relacionado con la **consistencia y la trabajabilidad**.

El tamaño y la forma del elemento estructural y la cantidad y disposición del acero de refuerzo fijan límites definidos a la consistencia y a la trabajabilidad del concreto. Estas últimas dependen, a su vez, de las cantidades relativas de cemento Pórtland, agua, agregados y de la granulometría de los mismos. La inclusión de aire afecta notablemente la consistencia y la trabajabilidad.

Se define como **consistencia** al carácter de la mezcla con respecto a su estado de fluidez. La consistencia abarca todos los grados de fluidez, desde la más seca hasta la más fluida de todas las mezclas posibles.

La expresión **mezcla plástica** se emplea para describir una mezcla cuya consistencia se encuentra entre la seca, desmenuzable y la muy fluida o acuosa. Una mezcla plástica es cohesiva y no se desmenuza. Fluye lentamente sin segregarse.

El término **trabajabilidad** se utiliza con referencia a las mezclas de concreto para indicar la mayor o menor facilidad que se puede encontrar al colocarlas en un lugar determinado. Es sinónimo de “docilidad”. Envuelve no sólo al significado de consistencia del concreto, sino también las condiciones bajo las cuales se colocará, forma y tamaño del elemento estructural, espaciamiento entre las varillas de refuerzo u otros detalles que se relacionan con el llenado fácil de las formas. Por ejemplo, una mezcla plástica rígida con agregados de tamaño grande, que es trabajable en unos moldes amplios y abiertos no podría colocarse en un muro delgado de refuerzo complicado.

Es deseable una consistencia plástica para la colocación del concreto, porque hay suficiente cantidad de pasta de cemento de consistencia tal, que las partículas de agregados virtualmente flotan en la pasta. Esto permite la incorporación completa de todas las partículas de agregados y elimina la posibilidad de formación de bolsas de piedra y de otros huecos importantes. Mediante la vibración interna se puede hacer flotar el agregado en una pasta más rígida que la necesaria para la colocación manual, siempre que la cantidad de pasta sea suficiente.

Si la cantidad de pasta de cemento no es suficiente para que floten todas las partículas del agregado, la masa resulta ser granular y desmenuzable. No es movable ni puede ser moldeada adecuadamente. Después de un intenso agitado o vibración interna existirán aún zonas de celdillas o espacios vacíos.

Si la cantidad de pasta de cemento es suficiente, pero demasiado acuosa para que floten las partículas de agregados, la mezcla se segregará al manejarse y al ser colocada. La pasta delgada y algunas de las partículas finas de arena se separarán de las partículas gruesas para

formar capas de lechada en la parte superior de la masa y dejarán al concreto falto de homogeneidad.

Las pruebas y la experiencia han demostrado claramente que para obtener estructuras homogéneas de concreto, impermeables y resistentes al intemperismo, es esencial que el concreto sea colocado con una consistencia plástica.

El aire incluido dentro de los límites aconsejables por consideraciones de resistencia mecánica y resistencia a la congelación, puede mejorar notablemente la cohesión y la trabajabilidad.

No existe una medida absoluta para la consistencia ni para la trabajabilidad. Pero la prueba de **revenimiento** puede ser muy útil como una indicación de la consistencia y en ciertas mezclas también de la trabajabilidad.

La prueba de revenimiento se efectúa de la siguiente manera:

Un molde de forma tronco cónica, de 30 cm de altura, 20 cm de diámetro en la base y 10 cm en la parte superior, se llena mediante tres capas de concreto fresco varillando 25 veces cada una de dichas capas con una varilla de 16 mm de diámetro, con punta terminada en forma de bala. Una vez lleno el molde, se enrasa el borde superior y se levanta. Se llama revenimiento a la medida del asentamiento que experimenta la masa al retirarse el molde. Un revenimiento pequeño indica una consistencia dura, mientras que uno grande, revela una consistencia muy húmeda.<sup>4</sup>

La prueba de revenimiento no puede ser una medida absoluta de consistencia ni de trabajabilidad, porque no distingue entre mezclas de características distintas. Por ejemplo, una mezcla gruesa y áspera, y otra con una proporción grande de arena que tenga el mismo revenimiento, no pueden considerarse de la misma consistencia. Esto es aún más cierto en el caso de la trabajabilidad. El revenimiento es, sin embargo, una medida más fiel de la consistencia y de la trabajabilidad del concreto con aire incluido, dada la mayor plasticidad y cohesión de éste.

Cuando los agregados y el contenido de cemento permanecen invariables, la prueba de revenimiento da una buena medida de cualquier cambio en la consistencia. Cuando los

materiales se miden con precisión, una variación en el revenimiento, como se indica antes, puede ser causada por cambios en la granulometría de los agregados, o por alguna alteración en el contenido de agua o en el contenido de aire. La prueba de revenimiento bajo estas condiciones puede ser una buena base para el control.

Si las mezclas se han especificado como realmente trabajables para una estructura dada, las variaciones del revenimiento pueden ser consideradas como una indicación de un cambio correspondiente en la trabajabilidad.

Existe otra prueba equivalente a la de revenimiento, aunque menos popular, que ha dado resultados satisfactorios en algunos casos: la **prueba de penetración de la esfera**, desarrollada en la Universidad de California. Esta prueba se describe en la norma ASTM-C360.

Ahora se tratará de la **relación entre los ingredientes del concreto**.

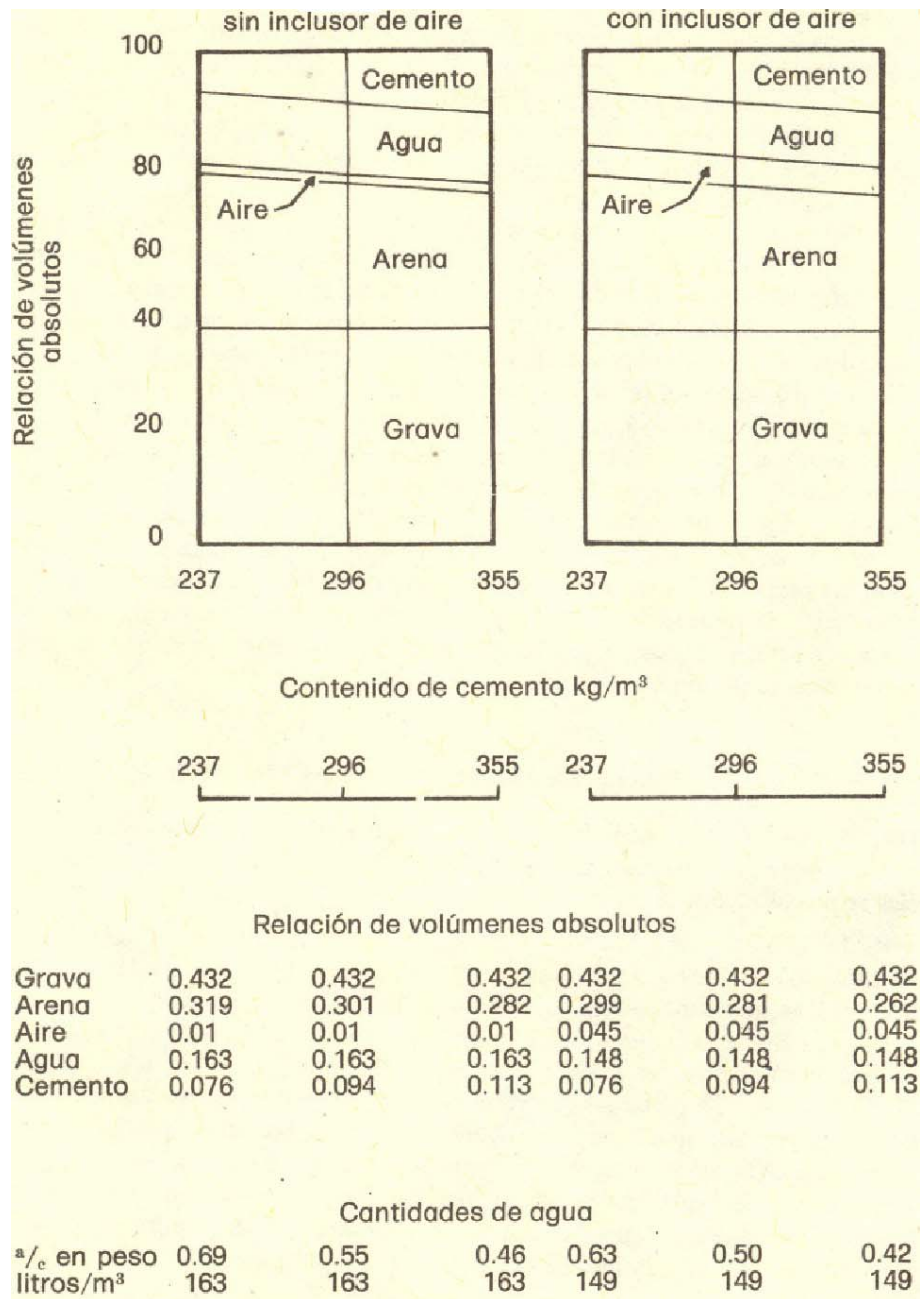
Los diagramas y datos de las figuras siguientes, representan una serie de mezclas de concreto con un mismo revenimiento (5 a 7.5 cm), muestran cómo varían los volúmenes absolutos de los ingredientes por separado, por unidad de volumen de concreto, al efectuar un cambio en alguno de los componentes de la mezcla.

En la Figura 3.1, se estudia un concreto elaborado con agregado de tamaño máximo de 40 mm y se observan los efectos por la variación en el contenido de cemento.

El lado izquierdo de la Figura 3.1 representa un concreto elaborado con cemento Pórtland sin aditivo inclusor de aire.

El lado derecho de esta misma Figura 3.1 se obtuvo con un aditivo inclusor de aire en la mezcla.

Para mantener el revenimiento deseado, de 5 a 7.5 cm, se cambió la proporción del agregado fino al grueso y la cantidad de agua, conforme el contenido de cemento fue aumentando. Las tablas que se encuentran debajo de los diagramas muestran los volúmenes absolutos individuales para cada mezcla y el agua en litros por peso de cemento y en libras por metro cúbico.

Figura 3.1<sup>4</sup>

Los diagramas de la Figura 3.2 muestran claramente la interrelación entre las proporciones del agregado, cantidad de cemento Pórtland y los contenidos de agua y aire, cuando se desee mantener el mismo revenimiento en el concreto. Pueden trazarse diagramas semejantes para indicar los cambios que se presentarían si se permitiera la variación del revenimiento.



El lado izquierdo de la Figura 3.2 consiste en un concreto con agregado de 40 mm de tamaño máximo, que contiene 310 Kg de cemento / m<sup>3</sup>. Muestra el efecto de aire incluido por incrementos sucesivos del aditivo inclusor de aire. Para mantener constante el revenimiento de 5 a 7.5 cm y el contenido de cemento, se variaron, según fue necesario, el porcentaje de arena y la cantidad de agua.

El lado derecho de la Figura 3.2 ilustra en forma similar los cambios necesarios en los volúmenes de los constituyentes para mantener constante el revenimiento y el contenido de cemento, al emplear agregados gruesos de diferentes tamaños máximos. Estas mezclas se hicieron con cemento con inclusor de aire, reforzado con un porcentaje fijo de un aditivo inclusor de aire agregado a la mezcladora.

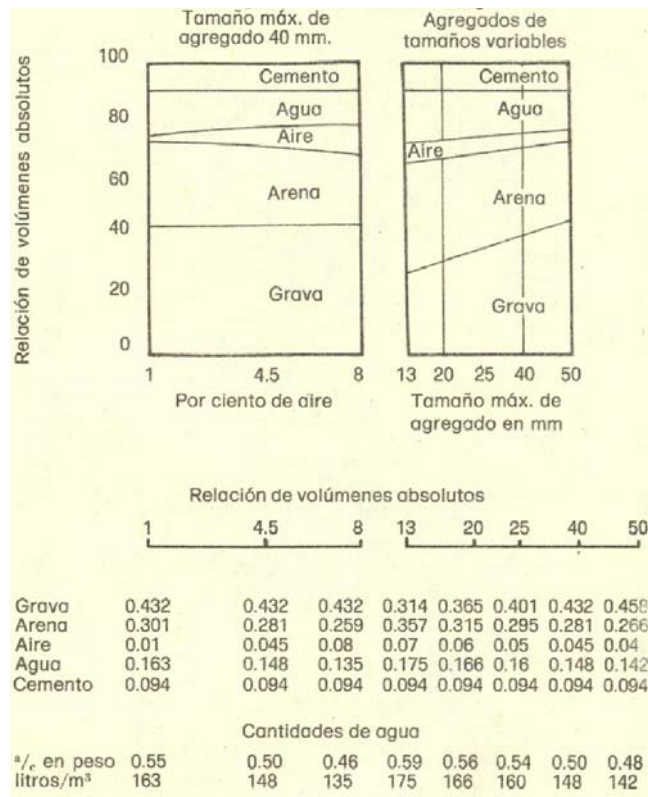


Figura 3.2<sup>4</sup>

En esta sección se hablará de los **requisitos para la resistencia mecánica.**

La relación agua / cemento es el factor que influye sobre la resistencia del concreto y puede usarse como base para producir sistemáticamente concreto que tenga las resistencias requeridas para las diversas partes de la obra.

Para mezclas trabajables, de materiales determinados y sujetos a condiciones de prueba dadas, la resistencia del concreto mantiene una dependencia fija con la relación agua / cemento.

La relación agua / cemento es el “punto preciso” para la resistencia mecánica y para la resistencia al intemperismo, aunque no se presta para el control de las revolturas. Este control debe realizarse a través de la uniformidad de las cantidades que intervienen en cada carga, con alguna medición sensible de la consistencia que permita detectar variaciones en los materiales o en el aire incluido o en el contenido de agua que produzcan desvíos significativos del “punto preciso”.

Si los requisitos de resistencia rigen en una determinada obra civil, la relación agua / cemento que se debe usar depende del nivel de experiencia sobre tal obra. Cuando se dispone de antecedentes, la relación agua / cemento que haya demostrado satisfacer con un grado de seguridad apropiado en la resistencia mecánica, será la que se deberá emplear. En caso de no disponer de esta información y se cuente con tiempo y con materiales antes de principiar la obra, la correspondencia entre resistencia y relación agua / cemento puede establecerse con pruebas directas empleando estos materiales. Con esta correspondencia establecida, arriba de la resistencia, se pueden hacer mezclas con la consistencia deseada, usando los agregados en la forma más económica.

Si se requiere en parte o en toda la obra, concreto con aire incluido, su determinación debe incluirse en las pruebas; también si se requiere el empleo de más de un tipo de cemento, por ejemplo cemento de alta resistencia rápida, para emplearse con fines especiales, debe ser incluido en las pruebas.

Si no se dispone de tiempo para efectuar pruebas preliminares, se pueden utilizar las curvas promedio de correlación entre resistencia y relación agua / cemento, establecidas por muchas pruebas en diversos laboratorios para una amplia variación de materiales que

cumplan con las especificaciones de la ASTM (American Society for Testing and Materials).

El área sombreada de la siguiente figura, representa el intervalo de las posiciones de las curvas de resistencia que se pueden esperar, para los cementos Pórtland Tipo I.

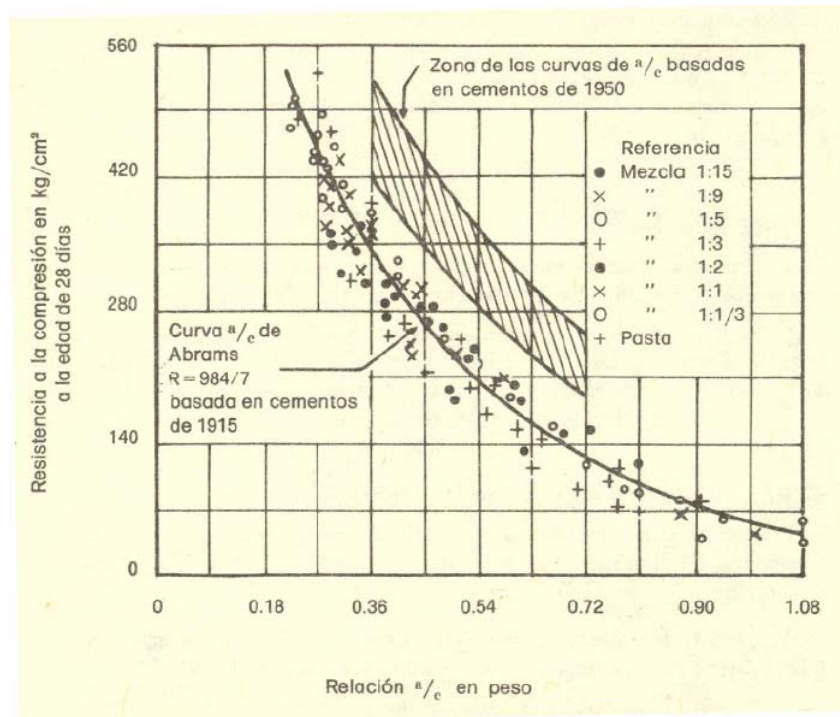


Figura 3.3 <sup>4</sup>

La Figura 3.4 muestra intervalos similares de resistencias para cementos Pórtland Tipos I y III, tanto para la resistencia a la compresión como a la flexión. Estos diagramas se pueden tomar como una base para el diseño.

Si no existe información previa aprovechable con respecto a los materiales que se utilizarán, debe elegirse una curva de la Figura 3.4, próxima al límite inferior del área sombreada. Realizando pruebas cuidadosamente controladas a medida que avanza el trabajo, se puede establecer una *curva experimental* para la obra, que se podrá utilizar si se presentan desviaciones significativas de la curva supuesta.

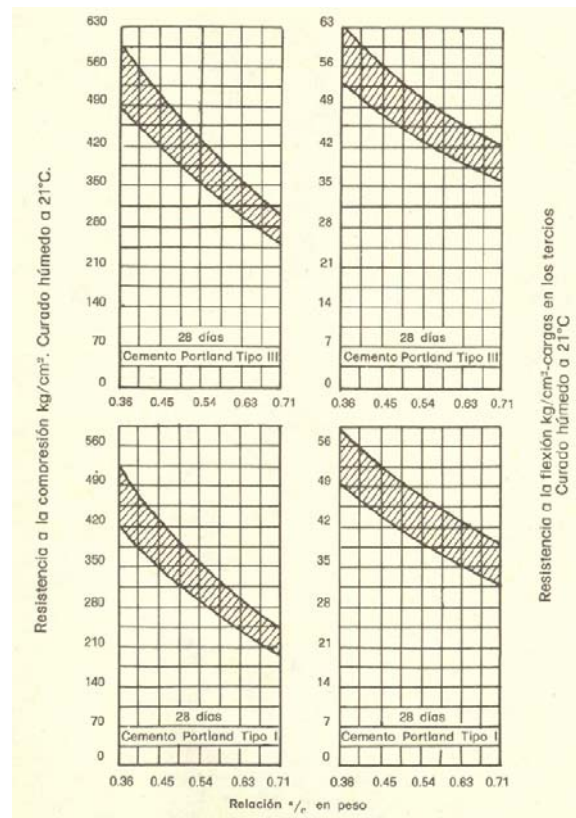


Figura 3.4 <sup>4</sup>

Es importante destacar que la resistencia a la flexión es más sensible a las características de los agregados que la resistencia a la compresión y que cuando el concreto se diseñe para resistencia a la flexión, la curva se seleccionará conservadoramente hasta que se puedan realizar pruebas en la obra.

Es recomendable usar una relación agua / cemento sustancialmente menor para concreto con aire incluido que para concreto sin aire incluido. Estos valores deberán emplearse hasta que se tenga suficiente experiencia con los materiales dados, que indiquen la posibilidad de hacer algún cambio, sin correr riesgo. La experiencia ha demostrado que cuando se mantienen constantes el contenido de cemento y la consistencia, la aparente reducción en la resistencia, es parcial o totalmente balanceada por la reducción que resulte del agua de mezclado requerida para la mejor trabajabilidad obtenida con aire incluido. En mezclas pobres con un contenido de cemento dado, el aire incluido puede originar resistencias más altas.

### Requisitos para intemperismo.

La siguiente tabla muestra la relación agua / cemento que se puede seleccionar para diferentes tipos de estructuras en una amplia variedad de condiciones de exposición.

Relación agua / cemento máxima permisible para concreto expuesto a condiciones severas.		
Tipo de estructura	Estructura continua o frecuentemente húmeda y expuesta a congelación o deshielo *	Estructura expuesta a agua de mar o a sulfatos
Secciones delgadas (barandales, guarniciones, umbrales, cornisas, concreto ornamental) y secciones con recubrimiento de refuerzo menor de 2.5 cm.	<b>0.45</b>	<b>0.40 **</b>
Todas las demás estructuras.	<b>0.50</b>	<b>0.45 **</b>
* El concreto debe ser con aire incluido. ** Si se emplea cemento resistente a sulfatos, se puede aumentar a / c en 0.05		

Tabla 3.1 <sup>5</sup>

Hay que fijarse en la recomendación de esta tabla, en que para condiciones severas de intemperismo, sólo se debe emplear concreto con aire incluido.

Las relaciones agua / cemento de la Tabla 3.1 son los valores máximos permisibles para el tipo de estructura y exposición indicadas. Cuando los requisitos de resistencia indican que son necesarias relaciones agua / cemento inferiores, deberán regir por supuesto los valores inferiores.

### Requisitos de colocación.

Con los requisitos de resistencia y durabilidad, la consistencia necesaria para una colocación adecuada, depende del tamaño del elemento estructural y del número y espaciamiento de las varillas de refuerzo. También ejerce influencia el método de colocación (varillado o vibrado).

Los requisitos esenciales de la consistencia permiten que el concreto pueda colocarse y consolidarse para formar una masa homogénea sin separación de los ingredientes. Por economía, siempre se debe usar el revenimiento más bajo que pueda permitir una colocación apropiada; para una relación agua / cemento fija, cualquier incremento en el revenimiento causa un aumento en el contenido de cemento.

Revenimientos recomendables para varios tipos de construcción		
Tipos de construcción	Revenimiento (cm)	
	Máximo *	Mínimo
Muros y zapatas de cimentación reforzadas	7.5	2.5
Zapatas simples, campanas neumáticas y muros	7.5	2.5
Vigas y muros reforzados	10	2.5
Columnas para edificios	10	2.5
Pavimentos y losas	7.5	2.5
Concreto masivo	5	2.5

\* Puede aumentarse 2.5 cm en métodos de consolidación diferentes al de vibración.

Tabla 3.2 <sup>5</sup>

La Tabla 3.2 da la recomendación del ACI para usarse como guía general.

Los límites indicados incluyen diferencias en las características de los agregados y en las condiciones de colocación. Normalmente, la inclusión de aire permite revenimientos más bajos para los mismos requisitos de colocación.

La Tabla 3.3 da las recomendaciones sobre el tamaño máximo de agregado que puede emplearse para diversos tipos de construcción y dimensiones de secciones. En ningún caso el tamaño máximo debe ser mayor que un quinto de la dimensión más estrecha de la cimbra, ni mayor de los tres cuartos de la mínima separación de las varillas de refuerzo. En las losas de concreto, el tamaño máximo no debe ser mayor de un tercio del espesor de la losa, y, usualmente se obtienen resultados más satisfactorios si el tamaño máximo del agregado se limita a un cuarto del espesor.

Tamaños máximos del agregado recomendable para varios tipos de construcción.				
Dimensión mínima de la sección (cm)	Tamaño máximo del agregado (mm) *			
	Muros reforzados, vigas y columnas.	Muros sin refuerzo.	Losas muy reforzadas.	Losas con poco refuerzo o sin él.
6.5 a 12.5	<b>13 a 20</b>	<b>20</b>	<b>20 a 25</b>	<b>20 a 40</b>
15 a 28	<b>20 a 40</b>	<b>40</b>	<b>40</b>	<b>40 a 75</b>
30 a 74	<b>40 a 75</b>	<b>75</b>	<b>40 a 75</b>	<b>75</b>
Mayor de 76	<b>40 a 75</b>	<b>150</b>	<b>40 a 75</b>	<b>75 a 150</b>
* Basado en aberturas cuadradas.				

Tabla 3.3 <sup>5</sup>

La guía principal para determinar el tamaño máximo de agregado, dentro de los límites señalados en la tabla anterior, es la siguiente: siempre se usará el mayor tamaño máximo permisible. Con una relación agua / cemento fija, el mayor tamaño máximo de agregado permite el contenido más bajo de cemento para una consistencia dada. Dicho de otro modo, para un contenido de cemento dado, a mayor tamaño máximo de agregado corresponde menor cantidad de agua. Sin embargo, cuando se requiere alta resistencia, es posible encontrar que, agregado de menor tamaño puede ser más económico en términos del contenido de cemento a pesar del aumento en el agua requerida.

### **Procedimiento para el proporcionamiento.**

Cada uno de los ingredientes fundamentales del concreto es indispensable en su elaboración, pero el cambio en la proporción de cada uno de ellos implica un detrimento para alguna de las propiedades deseadas del concreto plástico o endurecido.

- Calidad.- El cemento y los agregados originan resistencia, durabilidad y estabilidad de volumen del concreto. Un exceso de agua puede destruir la calidad del concreto.
- Trabajabilidad.- La pasta de cemento y agua proporciona la trabajabilidad del concreto. Un exceso de agregados hace que el concreto no sea trabajable.
- Economía.- Los agregados y el agua son los ingredientes menos costosos del concreto. El empleo de un exceso de cemento hace al concreto muy costoso.

La finalidad principal del proporcionamiento de los ingredientes del concreto estriba en lo siguiente:

- Calidad adecuada para el fin deseado.
- Trabajabilidad adecuada para el mezclado, transporte, colocación y terminado del concreto en forma satisfactoria.
- La máxima economía posible con los materiales disponibles.

Cuando ya están establecidos la relación agua / cemento, el tamaño máximo de agregado y los límites de revenimiento para una obra determinada, se recomienda realizar mezclas de tanteo con ajustes finales en revolturas de volumen completo, que cumplan exactamente las necesidades de la obra. Existen relaciones disponibles que ayudan a la obtención de mezclas convenientes con un mínimo de ajustes.

La relación más significativa que permite, en forma más directa, elegir el proporcionamiento, es la relación entre la cantidad total del agua de mezclado y el volumen del concreto. La experiencia ha demostrado que la cantidad de agua por unidad de volumen de concreto para una consistencia dada, está influida principalmente por el tamaño máximo, la forma de las partículas, la granulometría del agregado, y por la cantidad de aire incluido. Relativamente no es afectada por la cantidad de cemento.



Se puede obtener un valor aproximado, mediante una tabla que muestre el agua total necesaria por metro cúbico de concreto con diferentes revenimientos para agregados de diversos tamaños máximos.

Requisitos aproximados de agua de mezclado y de contenido de aire para diferentes revenimientos y tamaños máximos de agregados. *							
Revenimiento (cm)	Agua, litros por metro cúbico de concreto para el tamaño máximo de agregado indicado en mm						
	10	13	20	25	40	50	75
<b>Concreto sin aire incluido</b>							
2.5 a 5.0	<b>207</b>	<b>199</b>	<b>187</b>	<b>178</b>			<b>142</b>
7.5 a 10	<b>228</b>	<b>216</b>	<b>201</b>	<b>193</b>			<b>157</b>
15 a 17.5	<b>243</b>	<b>228</b>	<b>213</b>	<b>202</b>			<b>169</b>
Cantidad de aire retenido en el concreto sin inclusión de aire, en %	<b>3</b>	<b>2.5</b>	<b>2</b>	<b>1.5</b>	<b>1</b>	<b>0.5</b>	<b>0.3</b>
<b>Concreto con aire incluido</b>							
2.5 a 5.0	<b>181</b>	<b>175</b>	<b>166</b>	<b>160</b>	<b>148</b>	<b>142</b>	<b>133</b>
7.5 a 10	<b>201</b>	<b>193</b>	<b>175</b>	<b>175</b>	<b>163</b>	<b>157</b>	<b>148</b>
15 a 17.5	<b>216</b>	<b>204</b>	<b>184</b>	<b>184</b>	<b>172</b>	<b>166</b>	<b>160</b>
Promedio total recomendado de contenido de aire, en %	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4.5</b>	<b>4</b>	<b>3.5</b>
<p>* Estas cantidades de agua de mezclado, se usan en el cálculo de los factores de cemento para las revolturas de tanteo. Son máximas para el agregado grueso angular razonablemente bien formado y graduado dentro de los límites de las especificaciones aceptadas.</p> <p>Los valores de revenimiento para concretos con agregado mayor de 40 mm están basados en pruebas de revenimiento de concreto cribado, a fin de quitar las partículas mayores de 40 mm.</p>							

Tabla 3.4 <sup>5</sup>

Esta tabla incluye también la cantidad de agua para concreto con inclusor de aire y los porcentajes de aire recomendados en los que están basadas las cantidades de agua.

La tabla 3.4 asume que las cantidades de agua son las máximas que se suponen para agregados de buena forma, pero angulares y cuya granulometría está dentro de los límites

de las especificaciones generalmente aceptadas. Pueden encontrarse agregados cuyas formas de partículas o granulometría son más o menos aceptables, pero cuyos requisitos de agua se apartan un poco de los valores promedio. Sin embargo, puesto que esta tabla es principalmente para estimar las cantidades de la primera mezcla de tanteo, se puede usar para una amplia variedad de agregados. En cualquier caso, los ajustes necesarios deberán hacerse en los tanteos subsecuentes hasta obtener la combinación de materiales que dé la trabajabilidad deseada con la relación agua / cemento requerida.

El reporte del Comité 211 de ACI establece que se puede esperar concreto de trabajabilidad comparable con agregados de tamaño, forma y granulometría similares cuando se usa igual volumen de agregado grueso, varillado y seco, por unidad de volumen de concreto. Una tabla en el reporte del Comité, muestra los volúmenes de agregado grueso por unidad de volumen de concreto para un intervalo de tamaños máximos (suponiendo que las granulometrías están dentro de los límites convencionales), de los cuales puede esperarse que produzcan un concreto con un grado conveniente de trabajabilidad para la construcción con concreto reforzado.

La tabla muestra valores para arenas de cuatro finuras diferentes.

En la Tabla 3.5 se muestran los volúmenes de agregado grueso, varillado y seco por unidad de volumen de concreto para cuatro arenas con módulo de finura de 2.40 a 3.00. Esta tabla suministra el primer paso para la obtención de la primera mezcla de tanteo. Las mezclas de tanteo posteriores, deben hacerse con base en las observaciones referentes a la trabajabilidad y a las determinaciones del contenido de aire y de la relación agua / cemento.

Es necesario conocer el peso unitario estimativo del concreto y el peso unitario varillado del agregado grueso, antes de realizar las mezclas de tanteo. Estos valores se pueden evaluar fácilmente en el laboratorio de materiales.

Tamaños máximos del agregado recomendable para varios tipos de construcción.				
Dimensión mínima de la sección (cm)	Tamaño máximo del agregado (mm) *			
	Muros reforzados, vigas y columnas.	Muros sin refuerzo.	Losas muy reforzadas.	Losas con poco refuerzo o sin él.
6.5 a 12.5	<b>13 a 20</b>	<b>20</b>	<b>20 a 25</b>	<b>20 a 40</b>
15 a 28	<b>20 a 40</b>	<b>40</b>	<b>40</b>	<b>40 a 75</b>
30 a 74	<b>40 a 75</b>	<b>75</b>	<b>40 a 75</b>	<b>75</b>
Mayor de 76	<b>40 a 75</b>	<b>150</b>	<b>40 a 75</b>	<b>75 a 150</b>

\* Basado en aberturas cuadradas.

Tabla 3.5 <sup>5</sup>

En este capítulo se han expuesto al lector los principios fundamentales para la elaboración de concreto con cemento Pórtland. En el capítulo siguiente, se expondrá brevemente el procedimiento que se sigue para la fabricación de un concreto polimérico.

**Referencias de este capítulo.**

1. Cimentación y control de calidad. Torre de dirección. PEMEX.
2. Primero el hombre. Zimapán. CFE.
3. Un Puente para el progreso Coatzacoalcos II. SCT.
4. Cartilla del Concreto. IMCYC.
5. Recommended Practice for Selection Proportions for Normal Weight Concrete. ACI.



## **CAPÍTULO 4: EL CONCRETO ELABORADO CON POLÍMEROS.**

El concreto polimérico es un material compuesto por un agregado fino <sup>y/o</sup> uno grueso y un polímero que forma una matriz tridimensional que envuelve a los agregados; de esta manera se obtiene rápidamente (en algunas horas), un material sólido de muy alta resistencia a la compresión, impermeable, durable, resistente a los ataques químicos, aislante térmico y eléctrico, pero de baja resistencia a la tensión y de falla frágil.

Aparte de fraguar rápidamente, una vez añadido el agente de entrecruzamiento, el concreto polimérico tiene, en este momento, un inconveniente de tipo económico: un metro cúbico de concreto polimérico resulta del orden de cinco veces más caro que el correspondiente volumen de concreto elaborado con cemento Pórtland.

Para elaborar un concreto polimérico, se siguen las mismas recomendaciones con respecto a los agregados que para un concreto elaborado con cemento Pórtland que se trataron en el capítulo anterior; lo que cambia por completo, es el elemento cementante: ahora el polímero ocupa el lugar que la pasta de agua y cemento Pórtland ocupaba en el concreto clásico.

Para fabricar el concreto polimérico, el poliéster insaturado se mezcla con estireno (en diferentes proporciones), y luego con los agregados (también con variadas proporciones). Hasta este momento, la mezcla se mantiene estable, pero cuando se le añade el octoato de cobalto y el peróxido de metil etil cetona para producir el entrecruzamiento, comienza una reacción química que produce un fraguado muy rápido.

Si la reacción se mantiene temperatura ambiente, el fraguado se presenta en unas cuantas horas (dependiendo del proporcionamiento de los ingredientes de la mezcla), pero si se desea acelerar la reacción se puede someter la mezcla a mayores temperaturas.

Actualmente, el uso del concreto polimérico está muy restringido por su alto costo. Se elaboran elementos de pequeño volumen, como muebles para baño o formas

arquitectónicas muy esbeltas que requieren tener alta resistencia, como se aprecia en la siguiente imagen:



Cascarón cilíndrico de concreto polimérico <sup>1</sup>

También se ha estado usando con éxito en superficies de rodamiento, como en sistemas de piso de puentes o en pistas aeroportuarias.

Pero su uso más extendido está en la industria eléctrica, ya que han tenido mucho éxito las cajas, registros y trincheras para subestaciones eléctricas. La imagen que sigue, muestra cajas elaboradas por NEWBASIS: <sup>2</sup>



Cajas de Concreto Polimérico <sup>2</sup>

Fernando Pérez Godínez

En las imágenes que se muestran a continuación, se observa la facilidad de montaje de un registro eléctrico de concreto polimérico:



Colocación de registros eléctricos de Concreto Polimérico <sup>2</sup>



Aparte de la ligereza y facilidad de colocación de estos registros, también se aprovechan las propiedades del concreto polimérico: impermeabilidad, dielectricidad y resistencia mecánica.

El Instituto de Investigaciones Eléctricas, lleva a cabo diversas actividades relacionadas con el desarrollo de materiales y dispositivos que permitan inhibir o retardar los mecanismos de falla de los equipos eléctricos, así como innovar sus mecanismos de operación para incrementar en forma general la confiabilidad de las redes de transmisión y distribución en México.

Con el objetivo de presentar opciones para la reducción de salidas en las líneas de distribución de energía eléctrica debido al efecto que causan sobre ellas y su aislamiento las descargas atmosféricas y la contaminación, se desarrollaron diferentes dispositivos que incrementan las características dieléctricas del aislamiento convencional. Tal es el caso de la base de concreto polimérico 1A para utilizarse en aisladores 13A (13 kV) y de las bases del concreto polimérico 2A para emplearse en aisladores 22A y 33A, las cuales han presentado un excelente comportamiento después de tres años de evaluación en campo<sup>3</sup>. Por estas razones, con fines de prueba se instalaron siete mil de estas bases en diferentes circuitos de distribución<sup>3</sup>.

En forma complementaria y sobre un esquema similar, se diseñó y desarrolló el producto equivalente (bases aislantes de concreto polimérico) para utilizarse en los aisladores 13AC (FogBowl) localizados en regiones de alta contaminación y elevada incidencia de descargas atmosféricas. Se fabricaron mil piezas y actualmente se evalúan en campo 350 piezas en la División Oriente, 200 piezas en la División Jalisco y 450 piezas en la División Golfo Norte<sup>3</sup>.

Como una solución alternativa al aislamiento convencional 13A en zonas de elevada contaminación, y en lugar de la importación de aislamiento especial y sumamente costoso, se diseñaron, fabricaron e instalaron como trabajo piloto 1 170 bases de concreto polimérico con faldón. El conjunto (aislador 13A-base faldón) ha mostrado en laboratorio características de voltaje de flameo en condiciones de alta contaminación 20% superiores al aislamiento equivalente de importación<sup>3</sup>.

Es claro que, en estas aplicaciones, el costo del concreto polimérico compite con materiales dieléctricos de importación.

Como parte de las investigaciones que se llevan a cabo para resolver los problemas provocados por las descargas atmosféricas, se diseñó y fabricó un lote piloto de 1 500 apartarrayos de concreto polimérico para 13 kV. Dicho sistema está diseñado para drenar el sobrevoltaje de la línea a tierra a través de un cuerno de arqueo en serie con un elemento resistivo no lineal. El conjunto puede extinguir el arco provocado por el sobrevoltaje en un tiempo de 2 a 3 mseg, minimizando así la falta de continuidad en el servicio. Los resultados del comportamiento en campo han sido plenamente satisfactorios pues se redujeron sustancialmente las salidas debidas a descargas atmosféricas en circuitos altamente problemáticos seleccionados para tal fin<sup>3</sup>.



Apartarrayos de concreto polimérico<sup>3</sup>

En el mismo Instituto de Investigaciones Eléctricas, se están haciendo estudios de interacción suelo – estructura de cimentación – equipo, para evitar daños en las subestaciones eléctricas, causados por sismos en zonas de alto riesgo. Una de las vertientes de la investigación apunta hacia el uso de **microconcretos fibratados de alta resistencia**<sup>3</sup> que no es sino un concreto con fibras provenientes de polímeros con agregados finos.

La experiencia en el uso de concretos poliméricos en elementos estructurales volumétricos se reduce a pequeñas vigas probadas en el laboratorio, así que lo que pretende aportar esta tesis es inferir su comportamiento mecánico en elementos estructurales volumétricos reales, a través del estudio de su tenacidad. Por supuesto que se deja pendiente el estudio de la cantidad de calor generada en la reacción química del concreto polimérico en grandes masas.

En México, se pueden conseguir los materiales necesarios para elaborar el concreto polimérico con varios proveedores. En la referencia <sup>4</sup> se presentan algunos.

El siguiente capítulo (Capítulo 5) pondrá en contacto al lector con el análisis de regresión, que es una técnica estadística sofisticada que constituye los principales modelos usados en diseño de experimentos y optimización. Este material será muy útil para que el lector pueda abordar críticamente el Capítulo 6: Diseño del experimento y análisis de resultados, así como también para juzgar las conclusiones y recomendaciones.

**Referencias de este capítulo.**

1. Archivo fotográfico de Fernando Pérez Godínez.
2. NEWBASIS. <http://www.newbasis.com/spanish/index.html>
3. Instituto de Investigaciones Eléctricas.  
<http://www.iie.org.mx/publica/infan96/%7F%7F%7Flinea5.htm#anchor814482m>
4. Proveedores de Concreto Polimérico en México:
  - Cementos Pórtland Moctezuma, S. A. de C. V.
  - Construmac, S. A.
  - Home Mart México.



## CAPÍTULO 5: MÉTODOS DE REGRESIÓN.

### UN POCO DE HISTORIA.

Los astrónomos, que intentaban hallar las órbitas precisas de los planetas, se tuvieron que apoyar en una cantidad de observaciones, cada una de las cuales era proclive a un cierto tipo de error. Cada medición podía producir una ecuación ligeramente distinta de la órbita del planeta, y no era evidente qué método se debía utilizar para asegurar que se extrajera la órbita más exacta a partir de un conjunto dado de datos. Tanto Kepler como Galileo habían luchado en esto. La idea esencial era encontrar una curva que minimizara los errores totales, hasta que en 1805 Legendre, en *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, la formalizó con el método de los mínimos cuadrados. Dio una justificación clara y un método general utilizable. En 1809, Gauss publicó su propio método en *Theoria motus corporum coelestium*, y afirmó haberlo empleado desde 1795, lo que dio lugar a una disputa con Legendre por la prioridad. Al parecer, en 1801 Gauss utilizó ese método para calcular la trayectoria del recién descubierto asteroide Ceres, valiéndose de unas pocas e irregulares observaciones anteriores. También mostró que la distribución de errores era lo que hoy se conoce como curva de Gauss o Normal, y generalizó el resultado anterior de Moivre. La justificación de Gauss era que esta distribución permitía la observación media más probable. Laplace apareció entonces con una relación todavía más vigorosa: la de que cualquiera que fuese la distribución de los errores de las mediciones individuales, sus promedios tenderían a la distribución normal. También mostró que las estimaciones de mínimos cuadrados de Legendre tendían a la misma distribución. Los astrónomos reconocieron enseguida la utilidad del método, sobre todo cuando se supo que los errores de las observaciones astronómicas eran inherentes a ellas (y no meras consecuencias de las limitaciones de los instrumentos), provocados por la distorsión de la luz de las estrellas mientras viajaba a través de las turbulencias atmosféricas. En 1812, Laplace publicó su gran tratado titulado *Théorie analytique des probabilités*, en el que sintetizó todos los desarrollos hasta ese momento y fue durante una generación el texto principal sobre el tema<sup>1</sup>.

En un contexto social, la teoría de la probabilidad se veía como “cálculo de la conducta racional”. En 1814, Laplace dijo que la probabilidad no era otra cosa que reducción del buen sentido al cálculo. Los matemáticos de la Ilustración creían que los individuos ilustrados actuaban racionalmente y que la probabilidad daba a las masas una medida cuantificable gracias a la cual podía al menos imitar el buen sentido de los mejores de ella. El objetivo era una norma universal de comportamiento humano; el trabajo sobre el juego no era otra cosa que una manera de encontrar herramientas para tomar decisiones racionales en un mundo de incertidumbres. Por ejemplo, Laplace y otros consideraron la probabilidad de que un jurado de cierto tamaño emitiera un veredicto injusto. Pero hubo pensadores que no estaban del todo de acuerdo con el espíritu racionalista de la Revolución Francesa. John Stuart Mill sugirió que la razón se establecía mejor por observación y experimentación que por la vía de los puros supuestos racionales de probabilidad.

Adolphe Quetelet, matemático y astrónomo belga, proporcionó un nexo entre las estadísticas desarrolladas para la astronomía y las ciencias sociales. La idea de distribución normal era el origen de su idea de “hombre medio”, en torno al cual se distribuirían las características de la gente real, de la misma manera en que las observaciones imperfectas de las estrellas se agrupaban en torno a su verdadera posición. Así, la desviación respecto de esta norma teórica se veía como una suerte de error. Quetelet consideró que era obligación del Estado recoger y analizar datos demográficos para que el “físico social” pudiera descubrir leyes sociales análogas a las físicas, tales como la conservación de una “fuerza moral”. Buscó justificación en el hecho de que las tasas de nacimiento, defunción, delincuencia y matrimonio parecían estables a lo largo de los años, aunque difirieran de un país a otro, lo que justificaba la idea de que cada cuerpo social tenía una “física social” estable, pero ligeramente distinta.

Ya desde el siglo XVII se recogían esos datos sociales. En 1662, John Graunt publicó su *Natural and Political Observations*, basado en un análisis estadístico de las partidas de defunción de Londres, publicadas semanalmente como barómetro de cualquier posible epidemia que diera a la gente la señal de alarma para que huyera de la ciudad. En 1693, el astrónomo Edmond Halley publicó unas estadísticas sobre expectativas de vida basadas en

las partidas de defunción de la ciudad de Breslau, cuyos datos eran más rigurosos que de los que disponía Graunt. Halley también fue capaz de mostrar que el gobierno vendía demasiado baratos sus bonos vitalicios. Sin embargo, las estadísticas matemáticas se pueden considerar un avance de finales del siglo XIX, que produjo al mismo tiempo los métodos estadísticos de los astrónomos y la recogida de datos de los expertos en seguros.<sup>2</sup>

La tradición biométrica fue fundada por Francis Galton (1822 – 1911), primo de Charles Darwin, quien usó métodos estadísticos en el análisis de datos sociales y características hereditarias. La principal ambición del llamado movimiento eugenista era mejorar la especie humana mediante la crianza selectiva, y se consideró que la estadística proporcionaba una visión cuantitativa de la evolución y una mano orientadora en su progreso. Galton no aplicó la distribución normal como una “curva de errores”, sino como una medida de la variación, al advertir, partiendo de la teoría de Darwin de la evolución por selección natural, que era menester analizar la variabilidad biológica por derecho propio y no como error evolutivo respecto de alguna norma idealizada.

Fue Galton quien introdujo las nociones de **regresión** y de **correlación**. El concepto estadístico de regresión surgió de un estudio sobre guisantes. Galton dividió un lote de semillas en 7 grupos de acuerdo con el tamaño de las semillas. Las semillas de la descendencia resultante mostraron la misma variabilidad, o varianza, de tamaño en los distintos grupos. El tamaño medio de las semillas de todo el lote fue constante, pero las medias de los grupos individualmente considerados se apartaron del grupo progenitor para acercarse a esta media poblacional. Por tanto, las medias “regresaron” a la media de la población total.

Hacia 1885, Galton había comprendido el fenómeno de la regresión y en 1889 introdujo la idea afín de correlación. Mediante una adecuada puesta en escala de las dos variables asociadas y la conjetura de sus valores, Galton descubrió la única cantidad adimensional que podía representar un índice de asociación entre las dos variables. Este coeficiente de correlación podía variar entre +1, correlación positiva perfecta, y – 1, correlación negativa perfecta. Un coeficiente próximo a cero implicaba ausencia de correlación entre las variables. El coeficiente de correlación no podía probar por sí mismo **ninguna conexión**



**causal** entre las variables, pero podía justificar experimentos posteriores para descubrir ese mecanismo<sup>3</sup>.

También se dice que Galton utilizó por primera vez el término **análisis de regresión** en conexión con su trabajo sobre la relación entre la estatura  $x$  de un padre y la estatura  $y$  de su hijo. Después de reunir varios pares  $(x_i, y_i)$ , Galton utilizó el principio de mínimos cuadrados para obtener la ecuación de la recta de regresión estimada con el objeto de usarla para pronosticar la estatura del hijo a partir de la estatura del padre. Al utilizar la recta derivada, Galton encontró que si un padre tenía una estatura arriba del promedio, su hijo también tendría una estatura arriba de éste (el promedio), pero no tanto como la del padre. De forma similar, el hijo de un padre cuya estatura fuera menor que el promedio también se esperaba que tuviera una estatura menor que éste (el promedio), pero no tanto como el padre. Entonces, la estatura pronosticada del hijo era “atraída” hacia la media; debido a que regresión significa regreso, Galton adoptó la terminología de **recta de regresión**. Este fenómeno de ser atraído hacia la media se ha observado en muchas otras situaciones (por ejemplo, los promedios de bateo año por año en béisbol) y se llama **efecto de regresión**<sup>4</sup>.

Esta creencia, en lo personal, me parece más bien infundada, ya que en un artículo escrito por el mismo Galton<sup>1</sup>, menciona una situación ficticia referente a las estaturas de padres e hijos, con la finalidad de explicar el fenómeno de regresión. La versión de los guisantes<sup>3</sup>, me parece mucho más factible, dada la facilidad de obtener mucha más información.

Galton fue a la herencia de la variación continua lo que Mendel a la variación discreta, aunque cada uno de ellos trabajó con ignorancia del otro. Gregor Mendel tenía formación de matemático y físico; su artículo de 1865 en que sugería la existencia de genes fue redescubierto por los biómetras en 1900. Despertó mucha controversia, porque los acérrimos partidarios darwinistas del movimiento biométrico rechazaron abiertamente la noción de material genético. Pearson pensó que era una idea demasiado metafísica y no podía entender cómo un ente discreto podía manifestar características continuas. La cuestión no se resolvió hasta que en 1918 Fisher mostró que si se supone una cantidad suficientemente grande de genes, el modelo mendeliano produciría las correlaciones que estudiaban los biómetras. Se trataba de algo análogo a la distribución binomial (discreta)

que tiende a la distribución normal (continua) cuando se incrementaba la cantidad de ensayos.

Los argumentos filosóficos escapan a mi alcance, pero creo que la estadística no se desarrolló como rama independiente de las matemáticas, sino que su desarrollo y las herramientas analíticas que utilizó estaban profundamente arraigados en preocupaciones sociales.

En sus últimos años, Galton fundó un profesorado de eugenesia (ahora genética humana) en el University Collage de Londres, cuyo primer titular fue Karl Pearson (1857 – 1936), a quien sucedió Ronald Aylmer Fisher (1890 – 1962). En 1901, Pearson y Galton fundaron la revista *Biometrika*, que se convirtió en la principal revista de estadística. En sus páginas no sólo se encuentran las teorías de Galton de la regresión y la correlación, sino también la prueba *chi – cuadrado* de Pearson, que resolvió el problema de evaluar si una distribución teórica “se adaptaba” a los datos a los que se aplicaba. En 1908, W. S. Gossett, un biólogo que trabajaba en la cervecería Guinness de Dublín, introdujo la distribución *t* para muestras pequeñas. Firmaba con el seudónimo “Student” y por eso se alude a la prueba *t* como la prueba del estudiante. Gran parte de la obra de Pearson fue superada por Fisher, quien introdujo el análisis de varianza, técnica para probar el significado de los datos procedentes de los experimentos y en un primer momento se interesaba en experimentos con bloques aleatorios como los que usan en agricultura para probar la eficacia de los fertilizantes. El método consistía en separar matemáticamente entre “efecto” y “error”, y si un experimento revelaba un efecto real, el método mostraría la fuerza de ese efecto en relación con el error.

Hacia los años veinte, los matemáticos vieron en la estadística un tema de investigación legítimo que llevaba a un mayor rigor y a métodos más sutiles. Las ideas de Fisher sobre el diseño experimental y el análisis de la varianza ocupan un lugar destacadísimo en su libro *The Design of Experiment* (1936) y su influencia se hizo sentir en Inglaterra y en los Estados Unidos. Cambiaron radicalmente la práctica experimental en las ciencias relacionadas con material variable bajo condiciones imposibles de reproducir en el laboratorio.

## DEFINICIÓN Y OBJETIVOS DEL ANÁLISIS DE REGRESIÓN.

El análisis de regresión es una técnica estadística para investigar y modelar la relación entre variables. Son numerosas las aplicaciones de la regresión, y las hay en casi cualquier campo, incluyendo: ingeniería, ciencias físicas, ciencias químicas, ciencias biológicas, medicina, economía, administración y en las ciencias sociales. De hecho, puede ser que el análisis de regresión sea la técnica estadística más usada.

Los modelos de regresión se diseñan con cuatro objetivos principales:

- **Describir** un fenómeno.
- **Predecir** las variables de respuesta (o matemáticamente dependientes), para un conjunto de variables predictoras (regresores, o matemáticamente independientes). Si los regresores están dentro del intervalo de valores observados del fenómeno, la predicción se suele llamar interpolación; mientras que si estos regresores están fuera del intervalo de valores observados, la predicción se suele llamar extrapolación.
- **Explicar** la relación que existe entre las variables de respuesta.
- **Controlar** y **optimizar** el fenómeno.

Los modelos de regresión, pueden trabajar con diferentes tipos de predictores:

- Variables categóricas o cualitativas, que pueden ser trabajadas con variables numéricas llamadas indicadoras o ficticias. Las escalas de medición para este tipo de variables son nominales u ordinales. Este tipo de modelos, generan situaciones similares a los diseños experimentales, para comparar dos o más tratamientos.
- Variables cuantitativas, que se pueden trabajar con variables discretas o continuas, dependiendo de si los predictores forman un conjunto numerable (asociado con los números enteros) o un conjunto no numerable (asociado con los números reales). Las escalas de medición para estas variables son de intervalo y de razón.

## ANÁLISIS DE REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE.

El modelo de regresión lineal múltiple, asume las siguientes **premisas**<sup>5</sup>:

1. La relación entre la respuesta y los regresores es lineal, al menos en forma aproximada.
2. El término de error  $\varepsilon$  tiene media cero.
3. El término de error  $\varepsilon$  tiene varianza  $\sigma^2$  constante.
4. Los errores no están correlacionados.
5. Los errores tienen distribución normal.

El modelo de regresión lineal múltiple es:

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i$$

Notación: el subíndice  $i$  representa el número de observación del predictor  $j$ .

Hay  $m$  observaciones para cada predictor:  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Hay  $n$  predictores:  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Hay  $k = n + 1$  parámetros del modelo.

La letra mayúscula representa una variable aleatoria y la minúscula una variable determinada por el experimentador. El error  $\varepsilon_i$  también es una variable aleatoria.

Más adelante, las letras mayúsculas en negritas representarán matrices.

Obsérvese que la linealidad del modelo se refiere a los  $k = n + 1$  parámetros  $\beta_j$ , no a las variables predictoras (o regresores); lo cual quiere decir que un modelo como  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i1}^2 + \beta_3 x_{i1} x_{i2} + \beta_4 \text{sen}(x_{i2}) + \varepsilon_i$  es lineal con  $k = 5$  parámetros  $\beta_j$  y con  $n = 4$  predictores:  $x_{i1} = x_i$ ,  $x_{i2} = x_{i1}^2$ ,  $x_{i3} = x_{i1} x_{i2}$  y  $x_{i4} = \text{sen}(x_{i2})$ .

## MÉTODOS DE ESTIMACIÓN PUNTUAL.

En general, cuando se conoce una muestra aleatoria de tamaño  $n$  proveniente de una población con distribución de probabilidad dada, es posible estimar los parámetros de la distribución mediante el método de los momentos o mediante el método de máxima verosimilitud (factibilidad o posibilidad).

Nota: en esta sección se llamó  $n$ , y no  $m$ , al tamaño de la muestra, para no confundir la  $m$  de momento muestral con el número de las observaciones.

El método de los momentos consiste en igualar los primeros  $k$  momentos muestrales con los primeros  $k$  momentos poblacionales del mismo orden, cuando la distribución posee  $k$  parámetros.

El  $k$  -ésimo momento muestral está dado por:  $m^k = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n}$ ;  $k = 1, 2, 3, 4, \dots$

El  $k$  -ésimo momento poblacional está dado por:  $M^k = E(x^k)$ ;  $k = 1, 2, 3, 4, \dots$

Por ejemplo, para una distribución normal con parámetros  $\mu = E[x]$  y  $\sigma^2 = VAR[x]$ :

$$\text{Primer momento muestral: } m^1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\text{Primer momento poblacional: } M^1 = E[x] = \mu$$

$$\text{Segundo momento muestral: } m^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$$

$$\text{Segundo momento poblacional: } M^2 = E[x^2] = VAR[x] + (E[x])^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

Igualando:

$$M^1 = m^1 \rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

$$M^2 = m^2 \rightarrow \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$$

$$\rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

El método de estimación de máxima verosimilitud consiste en maximizar la función de verosimilitud, que es una función de probabilidad conjunta en términos de la muestra y de los parámetros de la distribución de la que procede tal muestra.

Los estimadores de máxima verosimilitud son:

- Asintóticamente insesgados.
- Asintóticamente normales.
- Alcanzan asintóticamente la cota de mínima varianza.

Se dice que un estimador  $(\hat{\theta})$  es insesgado si  $E[\hat{\theta}] = \theta$ , donde  $\theta$  es el parámetro poblacional.

Si un estimador es insesgado y además de varianza mínima, se dice que es muy eficiente.

La función de verosimilitud es:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

Como ejemplo, tomemos una muestra de tamaño  $n$  de una distribución normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \text{EXP}\left[-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(x - \mu)^2\right], \text{ con parámetros } \mu = E[x] \text{ y } \sigma^2 = \text{VAR}[x].$$

Para estimar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , primero se debe construir la función de verosimilitud:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \text{EXP}\left[-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(x_i - \mu)^2\right] \right\}$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma^2) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \text{EXP}\left[ \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \right]$$

Ahora se maximiza esta función para obtener los estimadores de máxima verosimilitud.

Por comodidad, es mejor maximizar el  $\ln(L)$ , lo cual conduce a los mismos valores críticos de  $L$ :

$$\ln(L) = n \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) + \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \mu} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{2(x_i - \mu)}{2\sigma^2} \right] = 0 \rightarrow -\sum_{i=1}^n x_i + n\mu = 0 \rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \sigma^2} = 0 \rightarrow -\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(x_i - \mu)^2}{2(\sigma^2)^2} \right] = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = n\sigma^2 \rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = S_n^2$$

Estos estimadores son los de máxima verosimilitud y corresponden a los mismos que se obtuvieron con el método de los momentos.

Verifiquemos, usando MATHEMATICA, que  $\mu = E[x]$ :

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \text{Exp}\left[-\frac{(\mathbf{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \right) d\mathbf{x}}{\frac{\text{If}\left[\text{Re}[\sigma^2] > 0, \sqrt{2\pi} \mu \sqrt{\sigma^2}, \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbf{x} d\mathbf{x}\right]}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma^2}}}} = \mu$$

$\therefore \mu = E[x]$

Verifiquemos que, usando MATHEMATICA,  $\sigma^2 = \text{VAR}[x] = E[(x - \mu)^2]$ :

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{(\mathbf{x}-\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \text{Exp}\left[-\frac{(\mathbf{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \right) d\mathbf{x}}{\frac{\text{If}\left[\text{Re}[\sigma^2] > 0, \frac{\sqrt{2\pi}\sigma^4}{\sqrt{\sigma^2}}, \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}} (\mathbf{x}-\mu)^2 d\mathbf{x}\right]}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma^2}}}} = \sigma^2$$

$$\therefore \sigma^2 = VAR[x]$$

Evaluaremos la esperanza de ambos estimadores, para ver sus propiedades de sesgo (en este caso, el software sólo es capaz de evaluar la esperanza de  $\hat{\mu}$ , pero no la de  $\hat{\sigma}^2$ ):

Usando MATHEMATICA, se evalúa la esperanza de  $\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \text{Exp}\left[-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \right) dx_i$$

$$\frac{\text{If}\left[\text{Re}[\sigma^2] > 0, n\sqrt{2\pi}\mu\sqrt{\sigma^2}, \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(-\mu+x_i)^2}{2\sigma^2}} n x_i dx_i\right]}{n\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2}}$$

$$E[\bar{x}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x} f(x_i) dx_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \text{EXP}\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \right] dx_i = \mu$$

Como  $E[\bar{x}] = E[\hat{\mu}] = \mu = E[x]$ , está claro que la media aritmética de la muestra es un estimador insesgado de la media poblacional.

Enseguida se observa que MATHEMATICA no pudo evaluar la esperanza de  $\hat{\sigma}^2$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\left(x_i - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)\right)^2}{n}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \text{Exp}\left[-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \right) dx_i$$

ComplexInfinity

Como el software no tuvo la capacidad analítica para valuar esta esperanza, procederemos a un método clásico, basado en el Teorema Central del Límite (nombre polémico, ya que muchos prefieren el nombre de Teorema del Límite Central).



El Teorema del Límite Central dice:

“Si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es una muestra aleatoria de variables independientes idénticamente distribuidas con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , el estadístico  $\bar{x}$  es una variable aleatoria normal con media  $\mu_{\bar{x}} = \mu$  y  $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ ”.

La demostración de este teorema se puede encontrar en la sección 7.4 de la referencia <sup>6</sup> de esta sección.

El estadístico  $\bar{x}$  se apega bastante bien al Teorema del Límite Central, cuando  $n$  es “suficientemente grande”. Es de práctica común considerar “suficientemente grande” a una muestra de tamaño  $n \geq 30$  ó  $n \geq 40$ .

Ahora se procede a calcular la esperanza de  $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = S_n^2$ :

$$E[S_n^2] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}\right] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2}{n}\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right] - E\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2\right]$$

$$E[S_n^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[x_i^2] - E[(\bar{x})^2]$$

Pero, usando la definición de varianza:

$$VAR[x] = E[(x - \mu)^2] = E[x^2 - 2\mu x + \mu^2] = E[x^2] - 2\mu E[x] + \mu^2 = E[x^2] - \mu^2$$

$$E[x^2] = VAR[x] + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

Y usando el Teorema del Límite Central:  $E[\bar{x}^2] = VAR[\bar{x}] + \mu^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$

Sustituyendo en la esperanza de  $S_n^2$ :  $E[S_n^2] = \frac{1}{n} n(\sigma^2 + \mu^2) - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^2$

Como  $E[S_n^2] \neq \sigma^2$ , está claro que  $S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$  es un estimador sesgado de la varianza poblacional, cuyo sesgo vale:

$$\text{sesgo} = E[\hat{\sigma}^2] - \sigma^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^2 - \sigma^2 = -\left(\frac{1}{n}\right)\sigma^2$$

Aquí puede verse que si  $n \rightarrow \infty$ , el  $\text{sesgo} \rightarrow 0$ , lo cual quiere decir que, efectivamente, un estimador de máxima verosimilitud es asintóticamente insesgado.

Un estimador insesgado, pero que no es de máxima verosimilitud sería:

$$S_{n-1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Se usa para estimar la varianza de una población cuando se cuenta con una muestra pequeña, ya que en tal caso,  $S_n^2$  tendría un sesgo demasiado grande, aunque su verosimilitud seguiría siendo máxima.

Observemos por qué  $S_{n-1}^2$  es insesgado:

$$\begin{aligned} E[S_{n-1}^2] &= E\left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}\right] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2}{n-1}\right] \\ E[S_{n-1}^2] &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n E[x_i^2] - \frac{2}{n(n-1)}\left(E\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right]\right) + \frac{1}{n(n-1)}\left(E\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right]\right) \\ E[S_{n-1}^2] &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n E[x_i^2] - \frac{1}{n(n-1)}\left(E\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right]\right) \end{aligned}$$

Del Teorema del Límite Central, se sigue que el estadístico  $T = \sum_{i=1}^n x_i$  tiene media  $\mu_T = n\mu$

y varianza  $\sigma_T^2 = n\sigma^2$ , así que la expresión anterior queda:

$$E[S_{n-1}^2] = \frac{1}{n-1}n(\sigma^2 + \mu^2) - \frac{1}{n(n-1)}(n\sigma^2 + n^2\mu^2)$$

$$E[S_{n-1}^2] = \frac{n}{n-1}(\sigma^2 + \mu^2) - \frac{1}{(n-1)}(\sigma^2 + n\mu^2) = \frac{(n-1)\sigma^2}{n-1} = \sigma^2$$

La relación entre los estimadores de la varianza:  $S_{n-1}^2$  y  $S_n^2$  es:

$$\frac{S_{n-1}^2}{S_n^2} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \frac{n}{n-1}$$

Por lo que un “factor de corrección de sesgo” para  $S_n^2$ , sería  $\frac{n}{n-1}$ .

## ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO DE REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE POR EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS.

Para estimar con mayor comodidad los parámetros del modelo:

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i$$

haremos uso de la siguiente notación matricial:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$ , en donde  $\mathbf{Y}$  es el vector columna de variables respuesta (aleatorias) de tamaño  $m \times 1$ .

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mk} \end{pmatrix}, \text{ donde } \mathbf{X} \text{ es una matriz de tamaño } m \times (k+1).$$

Donde  $m$  es el número de observaciones en la muestra;  $k$  es el número de predictores y  $n = k + 1$  es el número de parámetros a estimar.

El elemento  $x_{ij}$  de esta matriz, representa la observación  $i$  –ésima del predictor  $j$  –ésimo.

$\underline{\beta}' = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k\}$ , en donde  $\underline{\beta}$  es el vector columna de parámetros, de tamaño  $(k+1) \times 1$ .

$\underline{\varepsilon}' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m\}$ , en donde  $\underline{\varepsilon}$  es el vector columna de errores, de tamaño  $m \times 1$ .

Ahora definiremos una función que representa la suma de los cuadrados de los errores:

$$\mathbf{S}(\underline{\beta}) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \underline{\varepsilon}' \underline{\varepsilon} = (\underline{\mathbf{Y}} - \mathbf{X} \underline{\beta})' (\underline{\mathbf{Y}} - \mathbf{X} \underline{\beta}) = (\underline{\mathbf{Y}}' - \underline{\beta}' \mathbf{X}') (\underline{\mathbf{Y}} - \mathbf{X} \underline{\beta})$$

$$\mathbf{S}(\underline{\beta}) = \underline{\varepsilon}' \underline{\varepsilon} = \underline{\mathbf{Y}}' \underline{\mathbf{Y}} - \underline{\mathbf{Y}}' \mathbf{X} \underline{\beta} - \underline{\beta}' \mathbf{X}' \underline{\mathbf{Y}} + \underline{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \underline{\beta}$$

Y como  $\underline{\beta}' \mathbf{X}' \underline{\mathbf{Y}}$  es una matriz de tamaño  $1 \times 1$ , su transpuesta  $(\underline{\beta}' \mathbf{X}' \underline{\mathbf{Y}})' = \underline{\mathbf{Y}}' \mathbf{X} \underline{\beta}$  es igual a sí misma, entonces:

$$\mathbf{S}(\underline{\beta}) = \underline{\mathbf{Y}}' \underline{\mathbf{Y}} - 2 \underline{\beta}' \mathbf{X}' \underline{\mathbf{Y}} + \underline{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \underline{\beta}$$

Los estimadores de mínimos cuadrados deben satisfacer:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{S}(\underline{\beta})}{\partial \underline{\beta}} \right|_{\hat{\underline{\beta}}} = -2 \mathbf{X}' \underline{\mathbf{Y}} + \left. \frac{\partial \mathbf{S}(\underline{\beta}')}{\partial \underline{\beta}} \right|_{\hat{\underline{\beta}}} \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\underline{\beta}} + \underline{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \left. \frac{\partial \underline{\beta}}{\partial \underline{\beta}} \right|_{\hat{\underline{\beta}}} = \underline{\mathbf{0}}$$

En la que  $\underline{\mathbf{0}}$  es un vector de tamaño  $(k+1) \times (1)$ .

$$\left. \frac{\partial S(\underline{\beta}')}{\partial \underline{\beta}} \right|_{\hat{\underline{\beta}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_0} & \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta_0} & \dots & \frac{\partial \beta_k}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial \beta_k}{\partial \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_k} & \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta_k} & \dots & \frac{\partial \beta_k}{\partial \beta_k} \end{pmatrix} = \mathbf{I}_{(k+1) \times (k+1)}$$

$$\left. \frac{\partial S(\underline{\beta})}{\partial \underline{\beta}} \right|_{\hat{\underline{\beta}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_0} & \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_k} \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta_0} & \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \beta_k}{\partial \beta_0} & \frac{\partial \beta_k}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial \beta_k}{\partial \beta_k} \end{pmatrix} = \mathbf{I}_{(k+1) \times (k+1)}$$

Así que:

$$\left. \frac{\partial S(\underline{\beta})}{\partial \underline{\beta}} \right|_{\hat{\underline{\beta}}} = -2 \mathbf{X}' \underline{\mathbf{Y}} + \mathbf{I} \mathbf{X}' \mathbf{X} \underline{\mathbf{\beta}} + \underline{\mathbf{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \mathbf{I} = \underline{\mathbf{0}} \quad \Big|_{\hat{\underline{\beta}}}$$

Pero:  $\underline{\mathbf{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{X} = (\mathbf{X} \underline{\mathbf{\beta}})' \mathbf{X} = \mathbf{X}' \mathbf{X} \underline{\mathbf{\beta}}$ , por lo que la expresión anterior se simplifica a:

$$\mathbf{X}' \mathbf{X} \underline{\mathbf{\beta}} = \mathbf{X}' \underline{\mathbf{Y}} \quad \Big|_{\hat{\underline{\beta}}}$$

Que representa el sistema de ecuaciones mínimo – cuadráticas para el modelo de regresión lineal múltiple.

Despejando el vector de los estimadores mínimo – cuadráticos:

$$\hat{\underline{\beta}} = (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \underline{\mathbf{Y}}$$

Estos estimadores existen siempre que la matriz  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$  (simétrica y de tamaño  $n \times n$ ) no sea singular y no lo es mientras que los regresores sean linealmente independientes, es decir, si ninguna columna de la matriz  $\mathbf{X}$  es combinación lineal de las otras.

Los valores estimados de la variable de respuesta  $\hat{\underline{Y}}$  se escribirían así:

$$\hat{\underline{Y}} = \mathbf{X} \hat{\underline{\beta}} = \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \underline{Y} = \mathbf{H} \underline{Y}$$

A la matriz  $\mathbf{H} = \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'$  se le suele llamar la matriz de sombrero y transforma un vector de valores de respuesta observados en un vector de valores de respuesta estimados:

$$\hat{\underline{Y}} = \mathbf{H} \underline{Y}$$

El vector de residuales  $\underline{e}$ , se define como la diferencia entre las respuestas observadas y las respuestas ajustadas:

$$\underline{e} = \underline{Y} - \hat{\underline{Y}} = \underline{Y} - \mathbf{H} \underline{Y} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}) \underline{Y}$$

### PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES MÍNIMO – CUADRÁTICOS.

Las propiedades estadísticas del vector  $\hat{\underline{\beta}}$ , se demuestran de la siguiente manera:

Primero se examinará el sesgo:

$$E(\hat{\underline{\beta}}) = E [ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \underline{Y} ] = E [ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' (\mathbf{X}\underline{\beta} + \underline{e}) ]$$

$$E(\hat{\underline{\beta}}) = E [ (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{X}) \underline{\beta} + (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \underline{\mathbf{e}} ]$$

$$E(\hat{\underline{\beta}}) = \mathbf{I} E [\underline{\beta}] + (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' E [\underline{\mathbf{e}}] = \underline{\beta} + \underline{\mathbf{0}} = \underline{\beta}$$

$$E(\hat{\underline{\beta}}) = \underline{\beta}$$

Como  $E(\hat{\underline{\beta}}) = \underline{\beta}$ , se concluye que los estimadores mínimo – cuadráticos de una regresión lineal múltiple son insesgados con respecto a los parámetros del modelo.

La propiedad de varianza de  $\hat{\underline{\beta}}$  se expresa con la matriz de covarianza:

$$COV[\hat{\underline{\beta}}] = E \left\{ \left[ \hat{\underline{\beta}} - E(\hat{\underline{\beta}}) \right] \left[ \hat{\underline{\beta}} - E(\hat{\underline{\beta}}) \right]' \right\}$$

que es una matriz de tamaño  $n \times n$ , cuyo  $j$  –ésimo elemento diagonal es la varianza de  $\hat{\beta}_j$  y cuyo  $(ij)$  –ésimo elemento fuera de la diagonal es la covarianza entre  $\hat{\beta}_i$  y  $\hat{\beta}_j$ .

La covarianza de  $\hat{\underline{\beta}}$  es:

$$COV[\hat{\underline{\beta}}] = \sigma^2 (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1}$$

Por consiguiente, si hacemos  $\mathbf{C} = (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1}$ , la varianza de  $\hat{\beta}_j$  es  $\sigma^2 c_{jj}$  y la covarianza entre  $\hat{\beta}_i$  y  $\hat{\beta}_j$  es  $\sigma^2 c_{ij}$ .

En el apéndice C.4 de la referencia <sup>5</sup>, se demuestra que los estimadores mínimo – cuadráticos  $\left( \hat{\underline{\beta}} \right)$  son los mejores estimadores insesgados de  $\underline{\beta}$  (el teorema de Gauss – Markov).

Si además se supone que los errores  $\underline{\mathbf{e}}$  tienen distribución normal, entonces  $\hat{\underline{\beta}}$  también es el estimador insesgado de máxima verosimilitud de  $\underline{\beta}$ .

### ESTIMACIÓN DE $\sigma^2$ .

Se puede desarrollar un estimador de  $\sigma^2$  a partir de la suma de los cuadrados de los residuales:

$$SS_{\text{Res}} = \underline{\mathbf{e}}' \underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{Y}}' \underline{\mathbf{Y}} - \hat{\underline{\beta}}' \underline{\mathbf{X}}' \underline{\mathbf{Y}}$$

En el apéndice C.3 de la referencia <sup>5</sup>, se demuestra que la suma de cuadrados de residuales tiene  $m - n$  grados de libertad asociados con ella, porque se estiman  $n$  parámetros en el modelo de regresión.

El cuadrado medio de residuales es:

$$MS_{\text{Res}} = SS_{\text{Res}} / (m - n)$$

También en el mismo apéndice se demuestra que un estimador insesgado de la varianza es, precisamente el cuadrado medio de residuales:

$$\hat{\sigma}^2 = MS_{\text{Res}}$$

Hasta aquí dejaremos el análisis de regresión lineal, falta por detallar un conjunto de métodos que incluye: pruebas de hipótesis para determinar la adecuación general del modelo y para determinar los regresores específicos importantes; también falta mencionar intervalos de confianza, técnicas de predicción y un análisis de residuales que permita establecer la validez del modelo, con respecto a las premisas que asume.

En el capítulo 6, se trabajará un poco con tales métodos.



Por ahora, me parece más importante mencionar que hay ciertos fenómenos que no pueden ser representados con un modelo de regresión lineal, así que se proponen modelos no lineales que generalmente surgen del conocimiento profundo de la materia de aplicación del modelo.

### MODELOS DE REGRESIÓN NO LINEALES.

Un método muy usado en los algoritmos de cómputo para regresión no lineal es la **linealización** de la función no lineal, seguida por el método iterativo de **Gauss – Newton** para estimar parámetros. La linealización se hace con un desarrollo en serie de Taylor de la función  $f(x_i, \theta)$ , alrededor del punto  $\theta_0' = [\theta_{10}, \theta_{20}, \dots, \theta_{m0}]$ , reteniendo sólo los términos lineales. Así se obtiene:

$$f(x_i, \theta) = f(x_i, \theta_0) + \sum_{j=1}^m \left[ \frac{\partial f(x_i, \theta)}{\partial \theta_j} \right]_{\theta=\theta_0} (\theta_j - \theta_{j0})$$

Si se definen:

$$f_i^0 = f(x_i, \theta_0)$$

$$\beta_j^0 = \theta_j - \theta_{j0}$$

$$Z_{ij}^0 = \left[ \frac{\partial f(x_i, \theta)}{\partial \theta_j} \right]_{\theta=\theta_0}$$

se nota que el modelo de regresión no lineal se puede escribir de la forma:

$$Y_i - f_i^0 = \sum_{j=1}^m \beta_j^0 Z_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Esto es, ahora se cuenta con un modelo de regresión lineal. Se acostumbra llamar  $\theta_0$  a los valores iniciales de los parámetros.

La ecuación anterior se puede escribir de la forma:

$$Y_0 = Z_0 \beta_0 + \varepsilon$$

Por lo que el estimado de  $\beta_0$  es:

$$\hat{\beta}_0 = (Z_0' Z_0)^{-1} Z_0' Y_0 = (Z_0' Z_0)^{-1} Z_0' (Y - f_0)$$

Ahora bien, como  $\beta_0 = \theta - \theta_0$ , se puede definir  $\hat{\theta}_1 = \hat{\beta}_0 - \theta_0$  como los estimados corregidos de  $\theta$ . Se suele llamar a  $\hat{\beta}_0$  el vector de incrementos. De esta manera, ya es posible sustituir en el desarrollo parcial de Taylor los estimados corregidos en los mismos papeles que desempeñaban los estimados iniciales  $\theta_0$ , para a continuación producir otro conjunto de estimados corregidos, por ejemplo  $\theta_2$ , y así sucesivamente.

En general, en la  $k$ -ésima iteración se tiene:

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \hat{\beta}_k = \hat{\theta}_k + (Z_k' Z_k)^{-1} Z_k' Y_k = (Z_k' Z_k)^{-1} Z_k' (Y - f_k)$$

Siendo

$$Z_k = [Z_{ij}^k]; f_k = [f_1^k, f_2^k, \dots, f_m^k]; \hat{\theta}_k = [\theta_{1k}, \theta_{2k}, \dots, \theta_{nk}]'$$

Este procedimiento de iteración continúa hasta la convergencia, esto es, hasta que:

$$|(\hat{\theta}_{j,k+1} - \hat{\theta}_{jk}) / \hat{\theta}_{jk}| < \delta, j = 1, 2, \dots, n$$

En donde  $\delta$  es un número pequeño, por ejemplo  $1.0 \times 10^{-6}$ .

En cada iteración se debe evaluar la suma de cuadrados de residuales,  $S(\hat{\theta}_k)$ , para asegurar que se haya obtenido una reducción en su valor.

Cuando el procedimiento de estimación converge hacia un vector final de estimados de parámetro  $\hat{\theta}$ , se puede obtener un estimado de la varianza  $\sigma^2$  del error a partir del cuadrado medio residual:

$$\hat{\sigma}^2 = MS_{RES} = \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{m - n} = \frac{\sum_{i=1}^m [Y_i - f(x_i, \hat{\theta})]^2}{m - n} = \frac{s(\hat{\theta})}{m - n}$$

El método de linealización puede converger con mucha lentitud en algunos problemas y en algunos otros, incluso no converger. Por tal motivo, existen otras técnicas para resolver el problema de la regresión no lineal; algunas de ellas son modificaciones y refinamientos del esquema de linealización. En los siguientes párrafos describiremos algunos de esos procedimientos.

El método del **descenso más pronunciado** trata de determinar el mínimo global de la función suma de cuadrados de residuales mediante minimización directa. El objetivo es pasar desde un punto de partida inicial  $\theta_0$ , en una dirección del vector cuyos componentes se determinan con las derivadas de la función suma de cuadrados de residuales con respecto a los elementos de  $\theta$ , por lo general, esas derivadas se estiman ajustando una aproximación de primer orden, o plana, en torno al punto  $\theta_0$ . Los coeficientes de regresión del modelo de primer orden se toman como aproximaciones de las primeras derivadas. Este método se usa mucho en la metodología de superficies de respuesta, para pasar de un estimado inicial de las condiciones óptimas de un proceso, a una región que contenga al óptimo con más probabilidad. La desventaja principal de este método de solución del problema de regresión no lineal es que puede converger con mucha lentitud. El descenso más pronunciado suele funcionar mejor cuando el punto de partida está muy lejos del óptimo, sin embargo, a medida que la solución que se obtenga se acerque al óptimo, el procedimiento producirá movimientos cada vez más cortos.

El método de **incrementos fraccionados** consiste en una modificación del método de linealización. Para describirlo, recordemos que  $\hat{\beta}_k$  es el vector normal de incremento en la

relación de recurrencia para la  $k$  – ésima iteración. Pues bien, en esta iteración, sólo se continúa a la siguiente si  $S(\hat{\theta}_{k+1}) < S(\hat{\theta}_k)$ . Si  $S(\hat{\theta}_{k+1}) > S(\hat{\theta}_k)$ , se usa  $\hat{\beta}_k/2$  como vector de incrementos. Este corte a la mitad se podría usar varias veces durante una iteración, si es necesario. Si después de una cantidad especificada de intentos no se obtiene una reducción en  $S(\hat{\theta}_{k+1})$ , se termina el procedimiento. El concepto general de este método es evitar que el procedimiento de linealización haga un paso demasiado grande en cualquier iteración. La técnica de los incrementos fraccionados ayuda cuando se encuentran problemas de convergencia en el procedimiento básico de linealización.

El método del **compromiso de Marquardt** es otra modificación del algoritmo básico de linealización, en el que se propone calcular el vector de incrementos en la  $k$  – ésima iteración con  $(Z_k'Z_k + \lambda I_n)\hat{\beta}_k = Z_k'(Y - f_k)$ , en donde  $\lambda > 0$ . El objetivo consiste en encontrar un valor de  $\lambda$  que reduzca la suma de cuadrados de residuales en cada paso. El procedimiento también implica reducir  $\lambda$  por un factor de 10 en cada iteración, siempre que se satisfaga la condición  $S(\hat{\theta}_{k+1}) < S(\hat{\theta}_k)$ . La estrategia es mantener a  $\lambda$  tan pequeña como sea posible y al mismo tiempo asegurar que la suma de cuadrados de residuales se reduzca en cada iteración (por ejemplo, en PROC NLIN del software SAS<sup>5</sup>, se usa como valor inicial:  $\lambda_0 = 10^{-8}$ ). El método se llama compromiso de Marquardt, porque el vector de incrementos resultante que se obtiene con esta técnica suele estar entre el vector de Gauss – Newton y el obtenido con la dirección de descenso más pronunciado.

Es importante hacer una advertencia sobre la elección cuidadosa de los valores iniciales en cualquiera de los métodos de regresión no lineal, ya que un mal inicio, puede llevar a una solución subóptima. Con frecuencia, los parámetros tienen algún significado físico, lo cual es muy ventajoso para obtener los valores de arranque que posiblemente acelerarán la convergencia hacia una solución óptima del problema de regresión no lineal, por lo que el conocimiento profundo de la materia a la que se aplica el modelo vuelve a ser de suma importancia.

**Referencias de este capítulo.**

1. Enciclopedia Sigma. Compilador: Newman. Ed. Grijalbo.
2. Historia concisa de las matemáticas. Dirk J. Struik. Ed. IPN.
3. Richard Mankiewicz. Historia de las matemáticas, del cálculo al caos. Ed. Paidós.
4. Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias. Jay L. Devore. Ed. Thomson.
5. Introducción al análisis de regresión lineal. Montgomery. Peck. Vining. Ed. CECSA.
6. Estadística Matemática con Aplicaciones. Mendenhall. Wackerly. Scheaffer. Grupo Editorial Iberoamérica.

## CAPÍTULO 6: DISEÑO DEL EXPERIMENTO Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.

Es importante familiarizarse con los fundamentos del diseño experimental, así que se dedicarán los primeros párrafos de este capítulo a reseñarlos.

### ALGO DE HISTORIA.

Montgomery<sup>1</sup> habla de cuatro eras del desarrollo moderno del diseño experimental estadístico:

La era agrícola, encabezada por Sir Ronald A. Fisher entre los 20's y los 30's. En este período, Fisher fue el responsable de las estadísticas y el análisis de datos en la Estación Agrícola Experimental de Rothamsted en las cercanías de Londres, Inglaterra. Fisher se percató de que las fallas en la forma en que se llevaba a cabo el experimento que generaba los datos obstaculizaban con frecuencia el análisis de los datos de los sistemas (en este caso sistemas agrícolas). Mediante la interacción con múltiples científicos e investigadores de diversos campos, Fisher desarrolló las ideas que llevaron a los tres principios básicos del diseño experimental que se presentarán en la siguiente sección. Fisher incorporó de manera sistemática el pensamiento y los principios estadísticos en el diseño de las investigaciones experimentales, incluyendo el concepto de diseño factorial y el análisis de varianza. Sus libros tuvieron profunda influencia en el uso de la estadística en la agricultura y las ciencias biológicas relacionadas.

La era industrial se inició en la década de los 30's y un catalizador importante fue el desarrollo de la metodología de superficies de respuesta (MSR) por parte de Box y Wilson. Estos autores se percataron y explotaron el hecho de que muchos experimentos industriales son fundamentalmente diferentes de sus contrapartes agrícolas en dos sentidos: primero, la variable de respuesta puede observarse en muchas ocasiones casi de inmediato y segundo, el experimentador puede obtener pronto información crucial de un pequeño grupo de corridas que puede usarse para planear el siguiente experimento. Box denomina *inmediatez* y *secuencialidad* a estas dos características de los experimentos industriales. En los treinta

años siguientes, la MSR y otras técnicas de diseño se generalizaron en las industrias química y de proceso, sobre todo en el trabajo de investigación y desarrollo. George Box fue el líder intelectual de este movimiento. Sin embargo, la aparición del diseño estadístico a nivel de plantas o procesos de manufactura todavía no estaba muy generalizada. Algunas razones de ello incluyen la capacitación inadecuada de ingenieros y otros especialistas en procesos en los conceptos y los métodos estadísticos básicos, así como la falta de recursos de computación y software de estadística que fueran fáciles de usar para apoyar la aplicación de experimentos diseñados estadísticamente.

La era de la calidad comenzó a finales de los 70's con el interés creciente de la industria occidental en el mejoramiento de la calidad. El trabajo de Genichi Taguchi tuvo un impacto significativo en el aumento del interés y el uso de los experimentos diseñados. Taguchi elaboró el concepto de diseño paramétrico robusto, es decir: 1) hacer procesos insensibles a los factores ambientales o de otra índole que son difíciles de controlar, 2) fabricar productos insensibles a la variación transmitida por los componentes y 3) encontrar los niveles de las variables del proceso que obliguen a la media a un valor deseado mientras que al mismo tiempo se reduzca la variabilidad en torno a ese valor. Taguchi propuso diseños factoriales altamente fraccionados y otros arreglos ortogonales junto con algunos métodos estadísticos nuevos para resolver estos problemas. La metodología resultante generó muchas discusiones y controversias. Parte de la controversia surgió porque en Occidente la metodología de Taguchi fue defendida por los empresarios, y no se había hecho la revisión escrutadora adecuada de la ciencia estadística fundamental. Para fines de los 80's, los resultados de esta revisión indicaron que aún cuando los conceptos y los objetivos enfocados en la ingeniería de Taguchi tenían bases sólidas, existían problemas sustanciales con su estrategia experimental y sus métodos para el análisis de datos. De la controversia, surgieron por lo menos tres resultados positivos: primero, se generalizó el uso del diseño de experimentos en las industrias con piezas discretas, incluyendo la industria de manufacturas automotrices y aeroespaciales, de electrónica y semiconductores, y muchas otras, que anteriormente hacían poco uso de esta técnica; segundo, se inició la cuarta era del diseño estadístico. Esta era ha incluido un renovado interés general tanto por parte de investigadores como de profesionales en ejercicio en el diseño estadístico y el desarrollo de

varios enfoques nuevos y útiles para los problemas experimentales en el mundo industrial, incluyendo alternativas a los métodos técnicos de Taguchi que permiten que sus conceptos de ingeniería se lleven a la práctica de manera eficaz y eficiente; y tercero, la educación formal en diseño experimental estadístico se está haciendo parte de los programas de ingeniería en las universidades, tanto a nivel de licenciatura como de postgrado. La integración exitosa de una buena práctica del diseño experimental en la ingeniería y las ciencias es un factor clave en la competitividad industrial futura.

### **PRINCIPIOS BÁSICOS DEL DISEÑO EXPERIMENTAL.**

Si se desea llevar a cabo un experimento lo más eficiente posible, es necesario utilizar un enfoque científico para plantearlo. El diseño estadístico de experimentos se refiere al proceso para planear el experimento de tal forma que se recaben datos adecuados que puedan analizarse con métodos estadísticos que llevarán a conclusiones válidas y objetivas. El enfoque estadístico del diseño experimental es necesario si se quieren sacar conclusiones significativas de los datos. Cuando el problema incluye datos que están sujetos a errores experimentales, la metodología estadística es el único enfoque objetivo de análisis. Por lo tanto, cualquier problema experimental incluye dos aspectos: el diseño del experimento y el análisis estadístico de los datos. Estos dos aspectos se encuentran íntimamente relacionados porque el método del análisis depende directamente del diseño empleado.

Los tres principios básicos del diseño experimental son la **realización de réplicas**, la **aleatorización** y la **formación de bloques**.

Por **realización de réplicas** se entiende la repetición del experimento básico (en el caso de esta tesis, se hicieron dos réplicas para cada tipo de concreto). La realización de réplicas posee dos propiedades importantes. Primera, permite al experimentador obtener una estimación del error experimental. Esta estimación del error se convierte en una unidad de medición básica para determinar si las diferencias observadas en los datos son en realidad estadísticamente diferentes. Segunda, si se usa la media muestral (por ejemplo,  $\bar{y}$ ) para estimar el efecto de un factor en el experimento, la realización de réplicas permite al experimentador obtener una estimación más precisa de este efecto. Por ejemplo, si  $\sigma^2$  es la



varianza de una observación individual y hay  $n$  réplicas, la varianza de la media muestral

$$\text{es } \sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

La consecuencia práctica de lo anterior es que si no se hacen réplicas, las inferencias hechas para los datos no serán satisfactorias, pues las diferencias observadas podrían deberse al error experimental y no ser diferencias sustanciales. Por otra parte, si  $n$  es razonablemente grande y el error experimental es suficientemente pequeño, las diferencias observadas quedan claramente definidas.

Hay una diferencia importante entre réplicas y **mediciones repetidas**, ya que estas últimas sirven para evaluar sólo el error de medición, no el error puro (en el caso de esta tesis, se hicieron cinco mediciones repetidas para cada réplica de cada tipo de concreto).

La **aleatorización** es la piedra angular en la que se fundamenta el uso de los métodos estadísticos en el diseño experimental. Por aleatorización se entiende que tanto la asignación del material experimental como el orden en que se realizarán las corridas o ensayos individuales del experimento se determinan al azar. Uno de los requisitos de los métodos estadísticos es que las observaciones (o los errores) sean variables aleatorias con distribuciones independientes. La aleatorización hace por lo general que este supuesto sea válido. La aleatorización correcta del experimento ayuda también a “sacar del promedio” los efectos de factores extraños que pudieran estar presentes (en el caso de esta tesis, por ejemplo, la aleatorización ayuda a eliminar el efecto de fatiga que pudiera sufrir la máquina universal de carga, pero su principal función fue la de validar las técnicas estadísticas utilizadas).

Es muy común el uso de programas de computadora para auxiliar a los experimentadores a seleccionar y construir sus diseños experimentales (en esta tesis se usó MINITAB para generar números aleatorios).

La **formación de bloques** es una técnica de diseño que se utiliza para mejorar la precisión de las comparaciones que se hacen entre los factores de interés. Muchas veces la formación de bloques se emplea para reducir o eliminar la variabilidad transmitida por **factores**

**perturbadores**; es decir, aquellos factores que pueden influir en la respuesta experimental pero en los que no hay un interés específico (en el caso de esta tesis sólo se estudió un bloque: el de las mezclas con componentes en proporción 1:4:4; otros bloques no resultaron necesarios para comparar las tenacidades, pues el cambio en las proporciones generaría un cambio idéntico en la tenacidad de cada uno de los tres tipos de concreto).

### **PAUTAS GENERALES PARA DISEÑAR EXPERIMENTOS.**

Para aplicar el enfoque estadístico en el diseño y análisis de un experimento, es necesario que todos los que participan en el mismo tengan desde el principio una idea clara de qué es exactamente lo que va a estudiarse, cómo van a coleccionarse los datos, y al menos una comprensión cualitativa de la forma en que van a analizarse estos datos.

En esta sección se describe el procedimiento recomendado para diseñar experimentos.

1. Identificación y enunciación del problema. Este punto podría parecer obvio, sin embargo, en la práctica es difícil darse cuenta de que existe un problema que requiere experimentación, y tampoco es fácil una enunciación clara de este problema con la que todos estén de acuerdo. Es necesario desarrollar todas las ideas acerca de los objetivos del experimento. Generalmente, es importante solicitar aportaciones de todas las áreas involucradas: ingeniería, aseguramiento de calidad, manufactura, mercadotecnia, administración, el cliente y el personal de operación (el cual por lo general conoce a fondo el proceso y al que con demasiada frecuencia se ignora). Por esta razón, se recomienda un enfoque de equipo para diseñar experimentos. En la mayoría de los casos es conveniente hacer una lista de los problemas o las preguntas específicas que van a abordarse en el experimento. Una enunciación clara del problema contribuye sustancialmente a menudo para alcanzar una mejor comprensión de los fenómenos bajo estudio y la solución final del problema. También es importante tener presente el objetivo global; por ejemplo, ¿Se trata de un proceso o sistema nuevo (en cuyo caso el objetivo inicial posiblemente será la caracterización o tamizado de los factores) o se trata de un sistema maduro que se conoce con profundidad razonable y que se ha caracterizado con anterioridad (en cuyo caso el objetivo puede ser la optimización)? En un

experimento puede haber muchos objetivos posibles, incluyendo la confirmación (¿El sistema se comporta de la misma manera ahora que en el pasado?), el descubrimiento (¿Qué ocurre si se exploran nuevos materiales, variables, condiciones de operación, etc.?) y la estabilidad (¿Bajo qué condiciones las variables de respuesta de interés sufren una degradación seria?). Obviamente, las cuestiones específicas que habrán de abordarse en el experimento se relacionan de manera directa con los objetivos globales. Con frecuencia en esta etapa de la formulación del problema muchos ingenieros y científicos se percatan de que no es posible que un experimento comprensivo extenso responda las cuestiones clave y de que un enfoque secuencial en el que se utilice una serie de experimentos más pequeños en una estrategia más adecuada.

2. Elección de los factores, los niveles y los rangos. Cuando se consideran los factores que pueden influir en el desempeño de un proceso o sistema, el experimentador suele descubrir que estos factores pueden clasificarse como factores potenciales del diseño o bien como factores perturbadores. Los factores potenciales del diseño son aquéllos que el experimentador posiblemente quiera hacer variar en el experimento. Es frecuente encontrar que hay muchos factores potenciales del diseño, por lo que es conveniente contar con alguna clasificación adicional de los mismos. Algunas clasificaciones útiles son factores del diseño, factores que se mantienen constantes y factores a los que se permite variar. Los factores del diseño son los que se seleccionan realmente para estudiarlos en el experimento. Los factores que se mantienen constantes son variables que pueden tener cierto efecto sobre la respuesta, pero que para los fines del experimento en curso no son de interés, por lo que se mantendrán fijos en un nivel específico. Como un ejemplo de factores a los que se permite variar, las unidades experimentales o los “materiales” a los que se aplican los factores del diseño no son homogéneos por lo general, no obstante lo cual con frecuencia se ignora esta variabilidad de una unidad a otra y se confía en la aleatorización para compensar cualquier efecto del material o la unidad experimental. Muchas veces se trabaja con el supuesto de que los efectos de los factores que se mantienen constantes y de los factores a los que se permite variar

son relativamente pequeños. Por otra parte, los factores perturbadores pueden tener efectos considerables que deben tomarse en consideración, a pesar de que no haya interés en ellos en el contexto del experimento en curso. Los factores perturbadores suelen clasificarse como factores controlables, no controlables o de ruido. Un factor perturbador controlable es aquél cuyos niveles pueden ser ajustados por el experimentador. Si un factor perturbador no es controlable en el experimento, pero puede medirse, muchas veces puede usarse en el procedimiento del análisis denominado análisis de covarianza para compensar este efecto. Cuando un factor que varía de manera natural y no controlable en el proceso puede controlarse para los fines de un experimento, con frecuencia se le llama factor de ruido. En tales situaciones, es común que el objetivo sea encontrar los ajustes de los factores controlables del diseño que minimicen la variabilidad transmitida por los factores de ruido. En ocasiones a esto se le llama el estudio de robustez del proceso o el problema de robustez del diseño. Una vez que el experimentador ha seleccionado los factores del diseño, debe elegir los rangos en los que hará variar estos factores, así como los niveles específicos con los que se realizarán las corridas. También deberá pensarse cómo van a controlarse estos factores en los valores deseados y cómo van a medirse. El ingeniero también tendrá que tomar una decisión en cuanto a la región de interés para cada variable (es decir, el rango en el que se hará variar cada factor) y en cuanto al número de niveles de cada variable que usará. Para ello se requiere del conocimiento del proceso. Este conocimiento del proceso suele ser una combinación de experiencia práctica y conocimientos teóricos. Es importante investigar todos los factores que pueden ser de importancia y no dejarse influir demasiado por la experiencia pasada, en particular cuando uno se encuentra en las fases iniciales de la experimentación o cuando el proceso no está del todo maduro. Cuando el objetivo del experimento es el tamizado de los factores o caracterización del proceso, por lo general es mejor mantener reducido el número de niveles de los factores. En general, dos niveles funcionan bastante bien en los estudios de tamizado de factores. Elegir la región de interés también es importante. En el tamizado de factores, la región de interés deberá ser relativamente grande; es decir,

el rango en el que se hacen variar los factores deberá ser amplio. Conforme se sepa más acerca de las variables que son importantes y de los niveles que producen los mejores resultados, la región de interés se hará por lo general más estrecha.

3. Selección de la variable de respuesta. Para seleccionar la variable de respuesta, el experimentador deberá tener la certeza de que esta variable proporciona en realidad información útil acerca del proceso bajo estudio. En la mayoría de los casos, el promedio y / o la desviación estándar de la característica medida será la variable de respuesta. No son la excepción las respuestas múltiples. La eficiencia de los instrumentos de medición (o error de medición) también es un factor importante. Si la eficiencia de los instrumentos de medición es inadecuada, el experimentador sólo detectará los efectos relativamente grandes de los factores o quizá sean necesarias réplicas adicionales. En algunas situaciones en que la eficiencia de los instrumentos de medición es pobre, el experimentador puede decidir medir varias veces cada unidad experimental y usar el promedio de las mediciones repetidas como respuesta observada. Suele ser de importancia determinante identificar los aspectos relacionados con la definición de las respuestas de interés y cómo van a medirse antes de llevar a cabo el experimento. En ocasiones se emplean experimentos diseñados para estudiar y mejorar el desempeño de los sistemas de medición.

Se reitera lo crucial que es exponer todos los puntos de vista y la información del proceso en los pasos 1 – 3 anteriores (planeación previa al experimento).

4. Elección del diseño experimental. Si las actividades de planeación previas al experimento se realizan como es debido, este paso es relativamente sencillo. La elección del diseño implica la consideración del tamaño de la muestra (número de réplicas), la selección de un orden de corridas adecuado para los ensayos experimentales y la determinación de si entran en juego o no la formación de bloques u otras restricciones sobre la aleatorización. Al seleccionar el diseño, es importante tener en mente los objetivos experimentales. En muchos experimentos de ingeniería se sabe de antemano que algunos de los niveles de los factores producirán valores diferentes de la respuesta. En consecuencia, el interés se centra

en identificar qué factores causan esta diferencia y en estimar la magnitud del cambio de la respuesta. En otras situaciones podría haber más interés en verificar la uniformidad.

5. Realización del experimento. Cuando se lleva a cabo el experimento es vital monitorear con atención el proceso a fin de asegurarse de que todo se esté haciendo conforme a la planeación. Los errores en el procedimiento experimental en esta etapa destruirán por lo general la validez experimental. Poner en un primer plano la planeación es crucial para el éxito. Es fácil subestimar los aspectos de logística y planeación cuando se corre un experimento diseñado en un ambiente complejo de manufactura o de investigación y desarrollo. Algunas corridas de prueba son convenientes porque proporcionan información acerca de la consistencia del material experimental, una comprobación del sistema de medición, una idea aproximada del error experimental y la oportunidad de poner en práctica la técnica experimental global. Esto ofrece también una oportunidad para revisar, de ser necesario, las decisiones tomadas en los pasos 1 – 4.
6. Análisis estadístico de los datos. Deberán usarse métodos estadísticos para analizar los datos a fin de que los resultados y las conclusiones sean objetivos y no de carácter apreciativo. Si el experimento se ha diseñado correctamente y si se ha llevado a cabo de acuerdo con el diseño, los métodos estadísticos necesarios no deben ser complicados. Con frecuencia se encuentra que los métodos gráficos simples desempeñan un papel importante en el análisis e interpretación de datos. Debido a que muchas de las preguntas que el experimentador quiere responder pueden insertarse en el marco de la prueba de hipótesis, los procedimientos para probar hipótesis y estimar intervalos de confianza son muy útiles en el análisis de datos de un experimento diseñado. Muchas veces es muy útil también presentar los resultados de varios experimentos en términos de un modelo empírico, es decir, mediante una ecuación derivada de los datos que expresa la relación entre la respuesta y los factores importantes del diseño. El análisis residual y la verificación de la adecuación del modelo son también técnicas de análisis importantes.

Recuérdese que los métodos estadísticos no pueden demostrar que un factor (o factores) posee un efecto particular, sólo proporcionan pautas generales en cuanto a la confiabilidad y la validez de los resultados. Aplicados en forma correcta, los métodos estadísticos no permiten la demostración experimental de nada, pero sí sirven para medir el error posible en una conclusión o asignar un nivel de confianza a un enunciado. La ventaja principal de los métodos estadísticos es que agregan objetividad al proceso de toma de decisiones. Las técnicas estadísticas, aunadas a una buena ingeniería o conocimiento del proceso y el sentido común, llevarán por lo general a conclusiones sólidas.

7. Conclusiones y recomendaciones. Una vez que se han analizado los datos, el experimentador debe sacar conclusiones prácticas acerca de los resultados y recomendar un curso de acción. Los métodos gráficos suelen ser útiles en esta etapa, en particular para presentar los resultados. También deberán realizarse corridas de seguimiento o pruebas de confirmación para validar las conclusiones del experimento.

### **RECOMENDACIONES PARA EL EXPERIMENTADOR.**

El uso correcto de las técnicas estadísticas en la experimentación requiere que el experimentador tenga presentes los siguientes puntos:

1. **Uso de conocimientos no estadísticos del problema.** Este tipo de conocimientos es invaluable para explicar las relaciones entre los factores y las respuestas, para elegir los factores, determinar los niveles de los factores, decidir cuántas réplicas correr, interpretar los resultados del análisis, etc.
2. **Mantener el diseño y el análisis tan simple como sea posible.** Es necesario no exagerar en el uso de técnicas estadísticas complejas y sofisticadas. Los métodos de diseño y análisis relativamente simples son siempre los mejores<sup>1</sup>. Si un diseño se hace de manera cuidadosa y correcta, el análisis casi siempre será relativamente directo. Sin embargo, si el diseño se estropea grandemente por ineptitud, no es posible que incluso la estadística más compleja y elegante salve la situación.

3. **Tener presente la diferencia entre significación práctica y significación estadística.** Debido a que justamente dos condiciones experimentales producen respuestas medias que son estadísticamente diferentes, no existe ninguna seguridad de que esta diferencia sea de la magnitud suficiente como para tener algún valor práctico. Por ejemplo, si la modificación de un sistema de inyección de combustible permite un incremento en el rendimiento que se considere estadísticamente significativo, tal incremento no tendrá ninguna significación práctica si el costo de la modificación resulta exorbitante.
4. **Los experimentos son generalmente iterativos.** Cuando se inicia un estudio, es conveniente diseñar un experimento poco comprensivo, ya que esta etapa constituye un proceso de aprendizaje, se suele invertir menos del 25% de los recursos en estos experimentos iniciales. A medida que va aprendiendo, el experimentador puede establecer mucho mejor los factores importantes, sus rangos de variación, el número apropiado de niveles para cada factor y los métodos y las unidades de medición adecuados para cada factor y respuesta. Este hecho permitirá diseños más comprensivos cada vez, por lo que el enfoque iterativo o secuencial es más común que la elaboración de un único experimento que pretenda ser totalmente comprensivo.

### **DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO EXPERIMENTAL.**

Antes de comenzar con la descripción del diseño experimental, cabe mencionar que los datos a comparar (las tenacidades) tienen una peculiaridad: son magnitudes físicas que no se pueden medir directamente. Este hecho hizo necesario involucrar en el diseño del experimento esfuerzos y deformaciones (sí medibles directamente), ya que calculando el área bajo cada curva Esfuerzo – Deformación, estimada con un análisis de regresión, se pueden evaluar las tenacidades.

Los tres concretos probados fueron:

1. Elaborado con Cemento Pórtland (CC).
2. Elaborado con polímeros especiales para este fin (CP).



3. Elaborado con polímeros obtenidos del reciclado de envases de polietilentereftalato (CP-PET).

Los tres tratamientos fueron replicados, por lo cual se llevaron a cabo seis corridas experimentales: dos de CC (CC1 y CC2), dos de CP (CP1 y CP2) y dos de CP-PET (CP-PET1 y CP-PET2). Cada mezcla se elaboró en un día. Se hicieron en seis días consecutivos.

Cada una de estas seis mezclas satisfizo las siguientes condiciones:

- Cada una de las seis tuvo un volumen de diez litros (60 litros en total).
- Cada una se elaboró con las mismas proporciones de agregados: 4 unidades de volumen de grava, 4 unidades de volumen de arena y 1 unidad de volumen de gel cementante (agua – cemento, o polímero y agente de entrecruzamiento).

Lo anterior quiere decir que para preparar las mezclas se usó un total de 26.67 litros de grava (que pasó un tamiz cuadrado de 8 mm de lado), 26.67 litros de arena (que pasó un tamiz de 0.25 mm de diámetro), 2.22 litros de gel de agua-cemento, 2.22 litros de un polímero comercial y su agente de entrecruzamiento y 2.22 litros de polímero reciclado de PET (poliéster insaturado con estireno) y octoato de cobalto y peróxido de metil etil cetona como agente de entrecruzamiento. Lo cual da el volumen total de 60 litros.

- Se asignó un número aleatorio a cada una de las seis mezclas para su orden de elaboración, quedando el siguiente:

Orden de elaboración de la mezcla	Tipo de mezcla
1	CP2
2	CP-PET1
3	CC1
4	CC-PET2
5	CP1
6	CC2

Tabla 6.1 Aleatorización para el orden de elaboración de mezclas

- De cada mezcla, se tomó una muestra del 50% del volumen: cinco especímenes cúbicos, de 10 cm de arista, que de aquí en adelante llamaremos probetas.
- Las 30 probetas fueron engrasadas interiormente con aceite mineral y llenadas con el mismo procedimiento: en dos etapas con mezclado manual y engrasando con una regla.
- Cada probeta se marcó así (el primer número indica la muestra de la que proviene la probeta y el segundo, el orden en el que fue llenada tal probeta):

CC11	CC12	CC13	CC14	CC15	CC21	CC22	CC23	CC24	CC25
CP11	CP12	CP13	CP14	CP15	CP21	CP22	CP23	CP24	CP25
CP-PET 11	CP-PET 12	CP-PET 13	CP-PET 14	CP-PET 15	CP-PET 21	CP-PET 22	CP-PET 23	CP-PET 24	CP-PET 25

Tabla 6.2 Denominación de las probetas

- Todas las probetas se dejaron reposar 28 días a temperatura ambiente, recubiertas con una emulsión comercial, para evitar pérdida de agua por evaporación.
- A los 28 días, se sacaron las probetas de sus moldes cuidadosamente y se les asignaron números aleatorios a todas, para establecer el orden en el que serían probadas en la máquina universal de carga, quedando el orden mostrado en la tabla siguiente:

Orden de prueba de carga	Tipo de Probeta	Orden de prueba de carga	Tipo de Probeta	Orden de prueba de carga	Tipo de Probeta
1	CP13	11	CP-PET15	21	CC13
2	CP-PET11	12	CP24	22	CC14
3	CP-PET21	13	CP23	23	CP-PET13
4	CC22	14	CP22	24	CC15

5	CP-PET14	15	CP25	25	CC12
6	CC24	16	CP-PET24	26	CC23
7	CP15	17	CC25	27	CP-PET22
8	CP-PET25	18	CP14	28	CC11
9	CP12	19	CP-PET23	29	CP11
10	CP21	20	CP-PET12	30	CC21

Tabla 6.3 Orden de prueba de carga

- Una vez establecido el orden para la prueba de carga, se siguió el proceso descrito a continuación, para cada probeta:

Se colocó cada probeta en la máquina universal de carga y se le aplicó esfuerzo de compresión axial creciente, hasta que fallara.

Se registraron los esfuerzos para incrementos de deformación específica de 0.1% y la deformación específica y el esfuerzo correspondiente, en el momento de la falla.

En la tabla mostrada a continuación, se muestran los resultados de este experimento:

E:MPa D:mm/mm	CC1		CC2		CP1		CP2		CP-PET1		CP-PET2	
	E	D	E	D	E	D	E	D	E	D	E	D
1	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000
1	12.02	0.0010	12.00	0.0010	17.93	0.0010	21.18	0.0010	22.48	0.0010	21.79	0.0010
1	20.37	0.0020	20.49	0.0020	34.47	0.0020	41.88	0.0020	45.88	0.0020	46.21	0.0020
1	22.15	0.0030	23.26	0.0030	46.88	0.0030	45.94	0.0030	62.05	0.0030	64.63	0.0030
1	24.60	0.0035	23.79	0.0034	54.12	0.0040	57.15	0.0040	68.93	0.0040	68.78	0.0040
1	0.00	0.0035	0.00	0.0034	56.88	0.0050	57.21	0.0050	68.95	0.0050	69.26	0.0050
1	0.00	0.0035	0.00	0.0034	61.71	0.0060	57.56	0.0060	69.15	0.0059	71.83	0.0061
1	0.00	0.0035	0.00	0.0034	62.40	0.0070	60.53	0.0070	0.00	0.0059	0.00	0.0061
1	0.00	0.0035	0.00	0.0034	62.74	0.0080	61.95	0.0080	0.00	0.0059	0.00	0.0061
1	0.00	0.0035	0.00	0.0034	63.02	0.0089	67.09	0.0095	0.00	0.0059	0.00	0.0061
2	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000
2	11.89	0.0010	13.29	0.0010	16.22	0.0010	16.33	0.0010	20.73	0.0010	21.64	0.0010
2	21.20	0.0020	20.63	0.0020	45.78	0.0020	40.18	0.0020	41.97	0.0020	48.74	0.0020

2	24.21	0.0030	21.27	0.0030	46.86	0.0030	48.57	0.0030	61.92	0.0030	62.00	0.0030
2	25.49	0.0036	25.85	0.0037	54.55	0.0040	58.38	0.0040	67.26	0.0040	64.31	0.0040
2	0.00	0.0036	0.00	0.0037	55.64	0.0050	58.67	0.0050	71.13	0.0050	67.21	0.0050
2	0.00	0.0036	0.00	0.0037	61.78	0.0060	59.10	0.0060	73.04	0.0062	67.73	0.0053
2	0.00	0.0036	0.00	0.0037	61.93	0.0070	59.89	0.0070	0.00	0.0062	0.00	0.0053
2	0.00	0.0036	0.00	0.0037	61.97	0.0080	63.40	0.0080	0.00	0.0062	0.00	0.0053
2	0.00	0.0036	0.00	0.0037	66.15	0.0087	64.55	0.0089	0.00	0.0062	0.00	0.0053
3	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000
3	10.30	0.0010	10.34	0.0010	17.64	0.0010	16.81	0.0010	21.32	0.0010	21.60	0.0010
3	20.95	0.0020	19.89	0.0020	42.89	0.0020	46.24	0.0020	46.58	0.0020	48.65	0.0020
3	23.14	0.0030	19.96	0.0030	46.29	0.0030	49.97	0.0030	60.87	0.0030	58.68	0.0030
3	24.94	0.0035	22.04	0.0031	47.84	0.0040	52.00	0.0040	69.41	0.0040	65.93	0.0040
3	0.00	0.0035	0.00	0.0031	57.78	0.0050	56.51	0.0050	69.92	0.0050	70.91	0.0050
3	0.00	0.0035	0.00	0.0031	59.84	0.0060	60.92	0.0060	73.63	0.0062	73.44	0.0061
3	0.00	0.0035	0.00	0.0031	60.43	0.0070	61.23	0.0070	0.00	0.0062	0.00	0.0061
3	0.00	0.0035	0.00	0.0031	61.01	0.0080	61.54	0.0080	0.00	0.0062	0.00	0.0061
3	0.00	0.0035	0.00	0.0031	62.17	0.0086	62.56	0.0087	0.00	0.0062	0.00	0.0061
4	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000
4	11.48	0.0010	13.38	0.0010	16.12	0.0010	14.87	0.0010	17.74	0.0010	25.87	0.0010
4	19.54	0.0020	21.10	0.0020	42.99	0.0020	43.20	0.0020	43.94	0.0020	45.44	0.0020
4	22.01	0.0030	22.16	0.0030	48.40	0.0030	45.78	0.0030	60.79	0.0030	63.97	0.0030
4	23.79	0.0034	23.76	0.0034	57.08	0.0040	55.21	0.0040	65.35	0.0040	67.02	0.0040
4	0.00	0.0034	0.00	0.0034	57.59	0.0050	59.00	0.0050	70.09	0.0050	70.24	0.0050
4	0.00	0.0034	0.00	0.0034	58.93	0.0060	59.43	0.0060	73.99	0.0063	70.52	0.0060
4	0.00	0.0034	0.00	0.0034	62.34	0.0070	60.00	0.0070	0.00	0.0063	0.00	0.0060
4	0.00	0.0034	0.00	0.0034	62.40	0.0080	61.67	0.0080	0.00	0.0063	0.00	0.0060
4	0.00	0.0034	0.00	0.0034	64.63	0.0083	66.58	0.0084	0.00	0.0063	0.00	0.0060
5	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000
5	11.63	0.0010	11.87	0.0010	15.62	0.0010	16.01	0.0010	21.73	0.0010	25.94	0.0010
5	17.68	0.0020	18.30	0.0020	46.65	0.0020	45.33	0.0020	48.81	0.0020	48.83	0.0020
5	22.81	0.0030	22.77	0.0030	51.09	0.0030	46.17	0.0030	65.70	0.0030	64.48	0.0030
5	24.94	0.0035	26.79	0.0038	51.31	0.0040	55.75	0.0040	66.79	0.0040	67.38	0.0040
5	0.00	0.0035	0.00	0.0038	57.16	0.0050	55.97	0.0050	67.12	0.0050	68.41	0.0050
5	0.00	0.0035	0.00	0.0038	60.57	0.0060	60.19	0.0060	71.71	0.0061	69.24	0.0059
5	0.00	0.0035	0.00	0.0038	62.43	0.0070	60.32	0.0070	0.00	0.0061	0.00	0.0059
5	0.00	0.0035	0.00	0.0038	64.00	0.0080	64.12	0.0080	0.00	0.0061	0.00	0.0059
5	0.00	0.0035	0.00	0.0038	66.85	0.0090	64.77	0.0092	0.00	0.0061	0.00	0.0059

Tabla 6.4 Datos de esfuerzo y deformación obtenidos en la prueba de carga.

**Notas aclaratorias respecto a la Tabla 6.4:** 1MPa (un Mega Pascal) es una unidad de esfuerzo, en este caso, normal de compresión; y 1 mm / mm (un milímetro / milímetro) es la deformación específica, que se obtiene midiendo la contracción de la probeta entre su altura original).

Recordemos la **definición de tenacidad** dada en la introducción de este trabajo: “La tenacidad es la energía de deformación que es capaz de absorber una unidad de volumen de cierto material hasta que falla”.

La tenacidad se puede calcular como el **área bajo la curva Esfuerzo (E) – Deformación (D)**. Las unidades de la tenacidad, por definición, son  $\text{MJ} / \text{m}^3$  (Mega Joules / metro<sup>3</sup>), que equivalen a  $\text{MPa} \cdot \text{mm} / \text{mm}$  (área bajo la curva esfuerzo – deformación) =  $\text{MPa} \cdot \text{m} / \text{m} = (\text{MN} / \text{m}^2) (\text{m} / \text{m}) = \text{MN} \cdot \text{m} / \text{m}^3$  (aquí MN es un Mega Newton) =  $\text{MJ} / \text{m}^3$ .

Las siguientes gráficas muestran los datos:

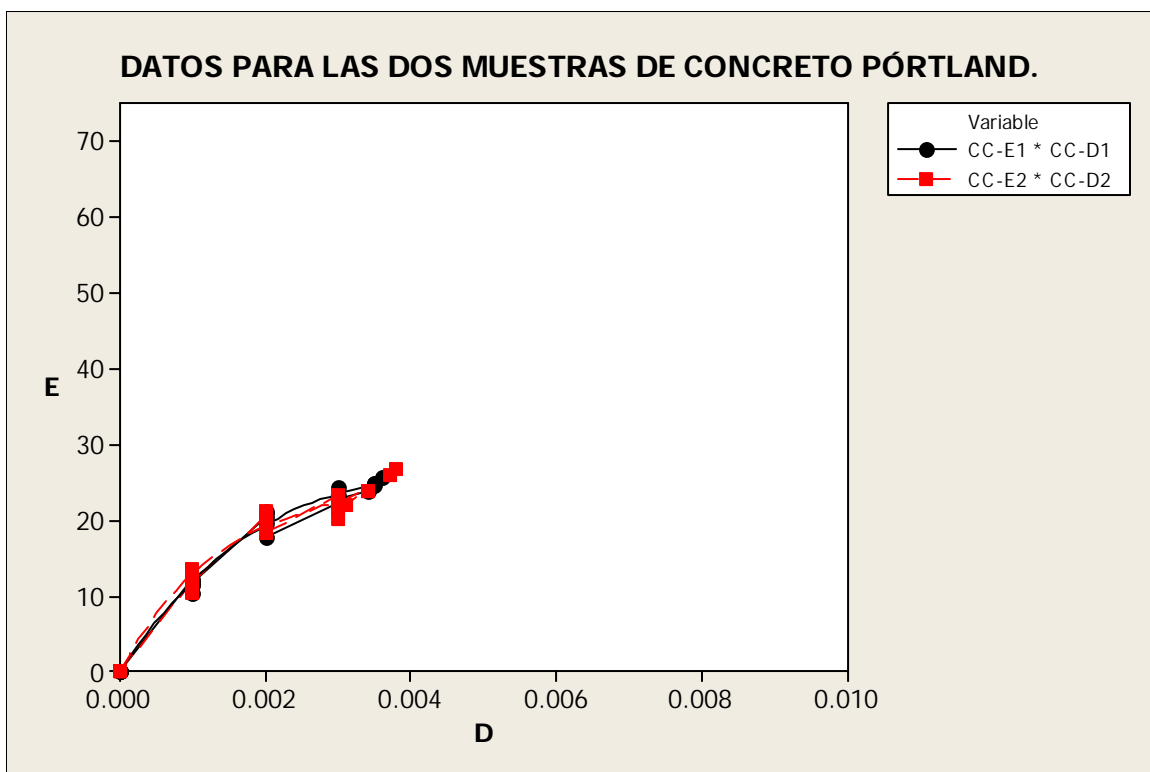


Figura 6.1

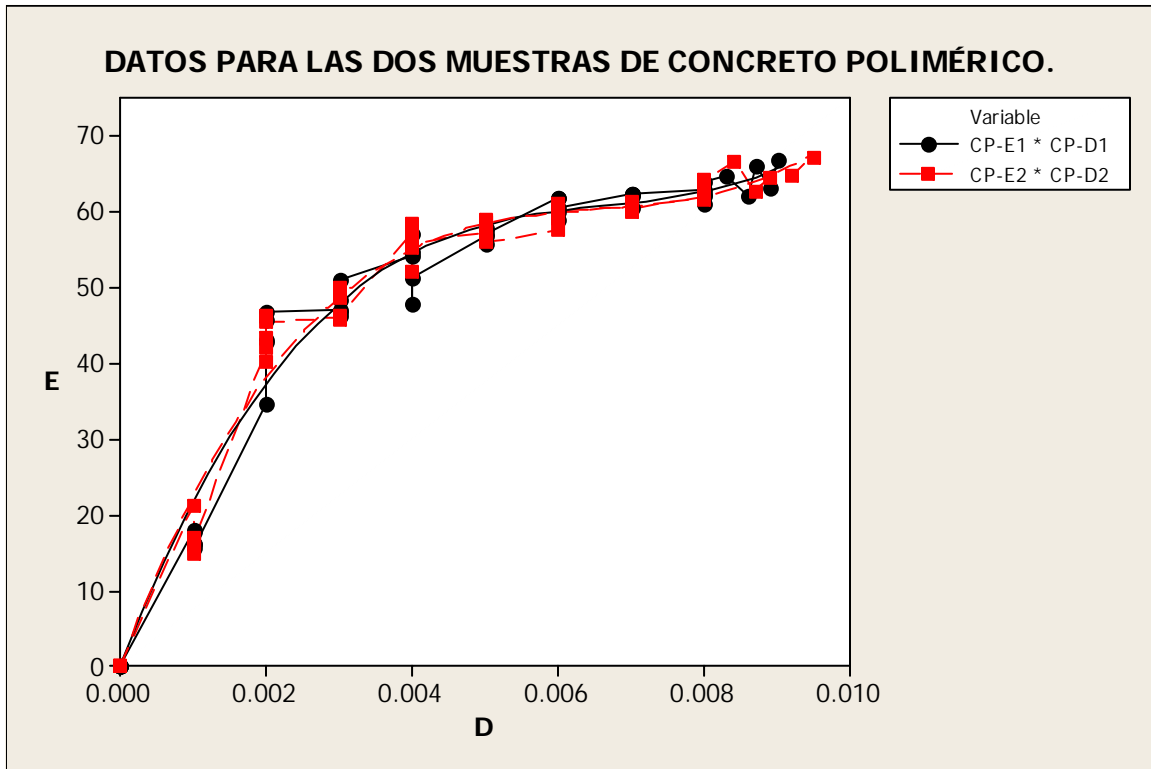


Figura 6.2

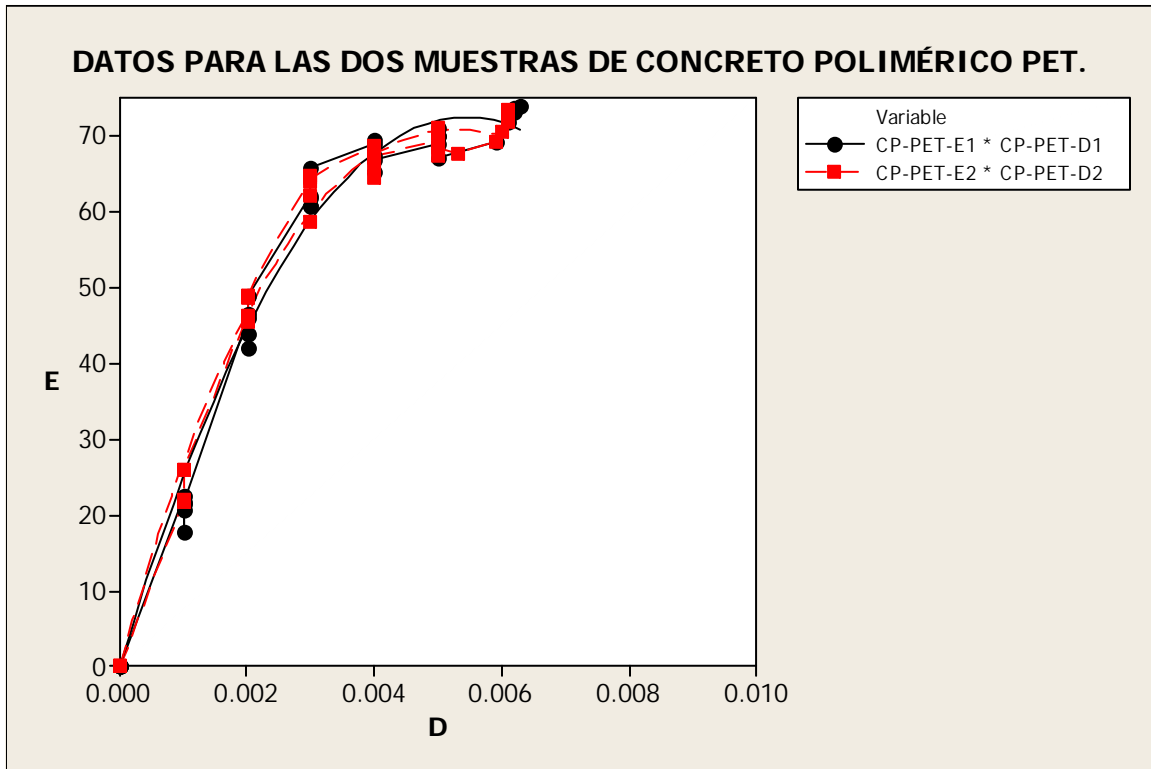


Figura 6.3

## ANÁLISIS DE REGRESIÓN PARA LOS DATOS.

### ELECCIÓN DEL MODELO.

Nuestro diseño del experimento involucra esencialmente dos problemas de análisis:

1. Los predictores son variables no aleatorias, porque las deformaciones específicas fueron elegidas desde cero, incrementándolas de 0.10% en 0.10%, excepto la última deformación específica (en la que se presenta la falla) que en realidad es una variable aleatoria. Estrictamente, el análisis debería ser híbrido, para considerar regresores no aleatorios con el regresor aleatorio. Sin embargo, por comodidad, se optó por analizar bajo la premisa de que todos los predictores son variables no aleatorias.
2. El modelo de regresión debe pasar por el origen, ya que si no se contrae la probeta, no experimenta esfuerzo de compresión alguno. Este hecho, impide la interpretación clásica de la variación total, como la suma de la variación no explicada por el modelo más la variación explicada por él ( $VT \neq VNE + VE$ )<sup>2</sup>.

Originalmente, se pensó en un modelo no lineal con dos o tres parámetros, que satisficiera las hipótesis anteriores, pero al tratar de evaluar los parámetros de los modelos propuestos, se encontraron fuertes problemas de convergencia.

Uno de los modelos no lineales que se probó fue:

$$E = \theta_1(1 - e^{-\theta_2 D}).$$

El modelo lineal de tipo polinomial de tercer grado con tres parámetros, resultó ser el más adecuado para nuestros fines. Este modelo es globalmente significativo en todos los casos. Los tres parámetros en CC2, CP1, CP2 y CP-PET2 son significativos y, como se verá más adelante, en CC1 y en CP-PET1, sólo dos de los tres parámetros resultan altamente significativos, sin embargo, se dejó el parámetro de baja significancia porque el modelo genera una curva bien ajustada a los datos, lo que es de suma importancia en este caso, ya



que el análisis se centra en la tenacidad: área bajo la curva esfuerzo – deformación, que se obtiene integrando la función ajustada.

Enseguida se muestra un análisis de regresión lineal, sin parámetro constante, de la forma:

$$E_i = \sum_{j=1}^3 \beta_j D_{ij} + \varepsilon_i$$

en el que  $D_{i1} = D_i$ ,  $D_{i2} = D_i^2$  y  $D_{i3} = D_i^3$ .

En este modelo,  $E$  es el esfuerzo en MPa y  $D$  es la deformación específica en mm / mm.

#### DETALLES DEL MODELO ELEGIDO.

La forma matricial del modelo es:

$$\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{D} \underline{\boldsymbol{\beta}} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Donde:  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{11}^2 & d_{11}^3 \\ d_{21} & d_{21}^2 & d_{21}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{i1} & d_{i1}^2 & d_{i1}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m1}^2 & d_{m1}^3 \end{pmatrix}$ ;  $\underline{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ ;  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}$  y  $\underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_m \end{pmatrix}$ .

Aplicando el método de los mínimos cuadrados a este modelo, tenemos:

$$\hat{\underline{\boldsymbol{\beta}}} = (\mathbf{D}' \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}' \underline{\mathbf{E}}$$

(Véase la última ecuación de la página 102 de este texto).

## ANÁLISIS DE VARIANZA PARA ESTOS MODELOS DE REGRESIÓN.

Supuestos básicos:

$$E_i = \sum_{j=1}^3 \beta_j D_{ij} + \varepsilon_i \quad \varepsilon : N(0, \sigma^2) \quad COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j \quad COV(\varepsilon_i, d_i) = 0$$

$$VT = \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{Y}_i + \hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{Y}_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{Y}_i)(\hat{Y}_i - \bar{Y}) + \sum_{i=1}^m (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$$

$$VT = VNE + 2 \sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{Y}_i)(\hat{Y}_i - \bar{Y}) + VE$$

$$VT = VNE + 2 \sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{\beta}_1 d_i - \hat{\beta}_2 d_i^2 - \hat{\beta}_3 d_i^3) (\hat{\beta}_1 d_i + \hat{\beta}_2 d_i^2 + \hat{\beta}_3 d_i^3 - \bar{Y}) + VE$$

De tal manera que el coeficiente de determinación, definido como la relación entre la variación explicada con respecto a la variación total, quedaría:

$$r^2 = \frac{VE}{VT} = \frac{VT - VNE - TR}{VT}$$

Obsérvese que este coeficiente de determinación no está acotado en el intervalo  $[0,1]$ , y no sirve como medida del porcentaje de de la variación total que explica el modelo de regresión.

Dado lo anterior, en lugar de usar un coeficiente de determinación, se usará el coeficiente de correlación entre las variables  $y$  y  $\hat{y}$  ( $-1 \leq r \leq 1$ ) elevado al cuadrado ( $0 \leq r^2 \leq 1$ ):

$$r^2 = [\text{corr}(y, \hat{y})]^2 = \left[ \frac{\text{cov}(y, \hat{y})}{\sigma_y \cdot \sigma_{\hat{y}}} \right]^2 = \frac{\left[ \sum_{i=1}^m (y - \bar{y})(\hat{y} - \bar{\hat{y}}) \right]^2}{\sum_{i=1}^m (y - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^m (\hat{y} - \bar{\hat{y}})^2}$$

Para nuestro problema particular,  $y \leftrightarrow E$   $\hat{y} \leftrightarrow \hat{E}$ , donde  $E$  representa el esfuerzo medido y  $\hat{E}$ , el esfuerzo estimado con el modelo:

$$\hat{E} = \hat{\beta}_1 D + \hat{\beta}_2 D^2 + \hat{\beta}_3 D^3$$

Así que el cuadrado del coeficiente de correlación queda:

$$r^2 = \left[ \text{corr}(E, \hat{E}) \right]^2 = \left[ \frac{\text{cov}(E, \hat{E})}{\sigma_E \cdot \sigma_{\hat{E}}} \right]^2 = \frac{\left[ \sum_{i=1}^m (E_i - \bar{E})(\hat{E}_i - \bar{\hat{E}}) \right]^2}{\sum_{i=1}^m (E_i - \bar{E})^2 \sum_{i=1}^m (\hat{E}_i - \bar{\hat{E}})^2}$$

El estimador de la varianza, es:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{VNE}{m-n} = \frac{SS_{RES}}{m-n} = \frac{e'e}{m-n} = \frac{Y'Y - \beta'X'Y}{m-n} = \frac{E'E - \beta'D'E}{m-n}$$

(Véanse las ecuaciones de la página 105 de este texto).

A continuación se muestran los resultados del análisis descrito, hecho con MINITAB.

En estas salidas de computadora, aparecen los estimadores de los parámetros del modelo junto con sus valores “P”, que permiten medir el nivel de significancia de cada uno de ellos en el modelo.

Después, la desviación estándar de los esfuerzos.

Finalmente, se muestra la tabla del análisis de varianza, que incluye el desglose del error total en error puro y en error debido a la falta de ajuste (esto es posible gracias a la replicación).

### Regression Analysis: CC-E1 versus CC-D1, CCD1cuad, CCD1cub

The regression equation is  
 CC-E1 = 14399 CC-D1 - 2718309 CCD1cuad + 1.74E+08 CCD1cub

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Noconstant				
CC-D1	14399	1015	14.19	0.000
CCD1cuad	-2718309	836503	-3.25	0.004
CCD1cub	173544405	163417227	1.06	0.300

S = 0.920400

## Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	8319.8	2773.3	3273.71	0.000
Residual Error	22	18.6	0.8		
Lack of Fit	4	5.5	1.4	1.88	0.157
Pure Error	18	13.1	0.7		
Total	25	8338.5			

2 rows with no replicates

Source	DF	Seq SS
CC-D1	1	8130.4
CCD1cuad	1	188.5
CCD1cub	1	1.0

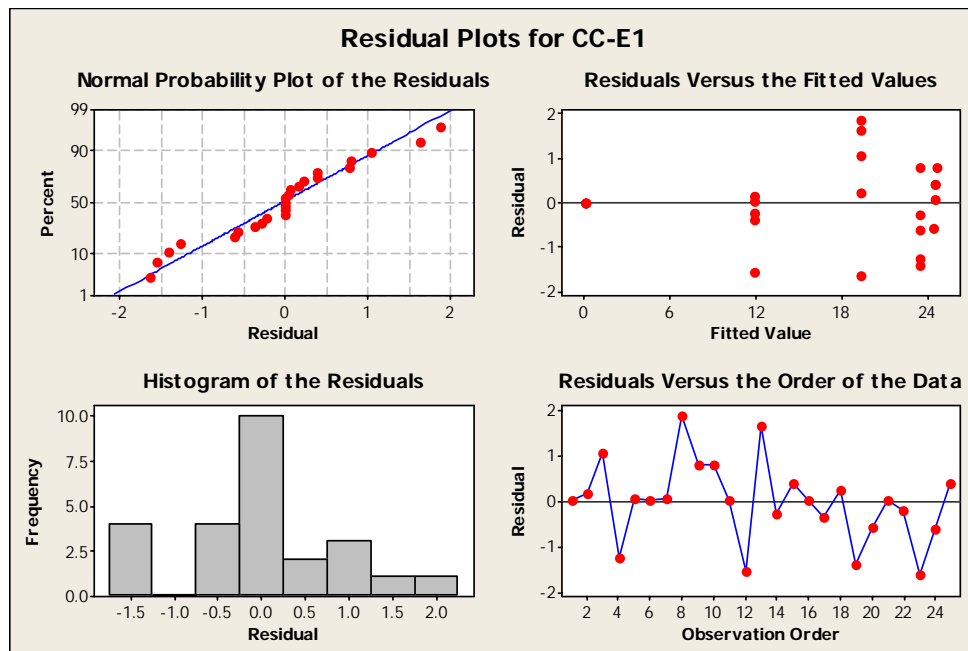


Figura 6.4

Para el esfuerzo CC-E1, se observa que no se puede rechazar la hipótesis  $\beta_3 = 0$  ( $P = 0.300$ ), que el modelo es globalmente significativo ( $P = 0.000$ ). Que la desviación estándar del esfuerzo es 0.920400 MPa y que la hipótesis de bondad de ajuste no puede ser rechazada ( $P = 0.157$ ). No parece haber un problema grave de normalidad y los residuales muestran cierta tendencia a amplificar su variación con respecto a los valores ajustados, probablemente debido a que la deformación nula implica esfuerzo nulo.

## Regression Analysis: CC-E2 versus CC-D2, CCD2cuad, CCD2cub

The regression equation is

$$\text{CC-E2} = 17456 \text{ CC-D2} - 5254521 \text{ CCD2cuad} + 6.45\text{E}+08 \text{ CCD2cub}$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Noconstant				
CC-D2	17456	1146	15.23	0.000
CCD2cuad	-5254521	899361	-5.84	0.000
CCD2cub	644682655	170169790	3.79	0.001

S = 1.14760

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	8143.2	2714.4	2061.08	0.000
Residual Error	22	29.0	1.3		
Lack of Fit	5	11.2	2.2	2.15	0.108
Pure Error	17	17.7	1.0		
Total	25	8172.2			

3 rows with no replicates

Source	DF	Seq SS
CC-D2	1	7910.0
CCD2cuad	1	214.3
CCD2cub	1	18.9

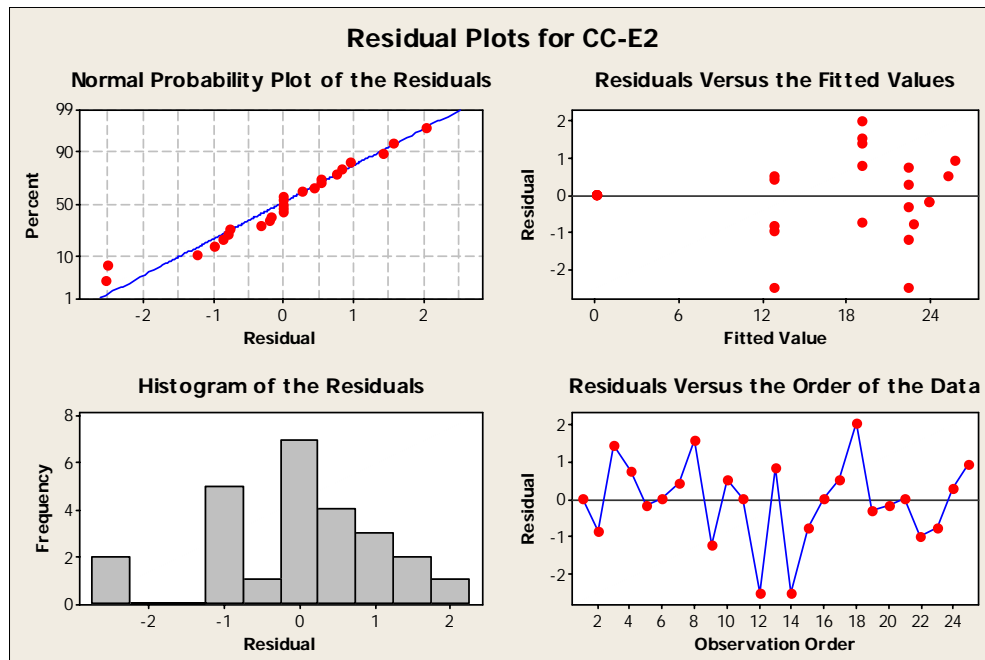


Figura 6.5

Fernando Pérez Godínez

Para el esfuerzo CC-E2, se observa que los tres parámetros del modelo de regresión son altamente significativos, que la significancia global del modelo es buena ( $P = 0.000$ ). Que la desviación estándar del esfuerzo es 1.14760 MPa y que la hipótesis de bondad de ajuste no puede ser rechazada ( $P = 0.108$ ). No parece haber un problema grave de normalidad y los residuales muestran cierta tendencia a amplificar su variación con respecto a los valores ajustados, probablemente debido a que la deformación nula implica esfuerzo nulo.

### Regression Analysis: CP-E1 versus CP-D1, CPD1cuad, CPD1cub

The regression equation is  
 CP-E1 = 25204 CP-D1 - 3623877 CPD1cuad + 1.82E+08 CPD1cub

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Noconstant				
CP-D1	25204.2	892.7	28.23	0.000
CPD1cuad	-3623877	301803	-12.01	0.000
CPD1cub	181588693	24304282	7.47	0.000

S = 3.18821

#### Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	129755	43252	4255.09	0.000
Residual Error	47	478	10		
Lack of Fit	11	299	27	5.49	0.000
Pure Error	36	178	5		
Total	50	130233			

5 rows with no replicates

Source	DF	Seq SS
CP-D1	1	120864
CPD1cuad	1	8324
CPD1cub	1	567

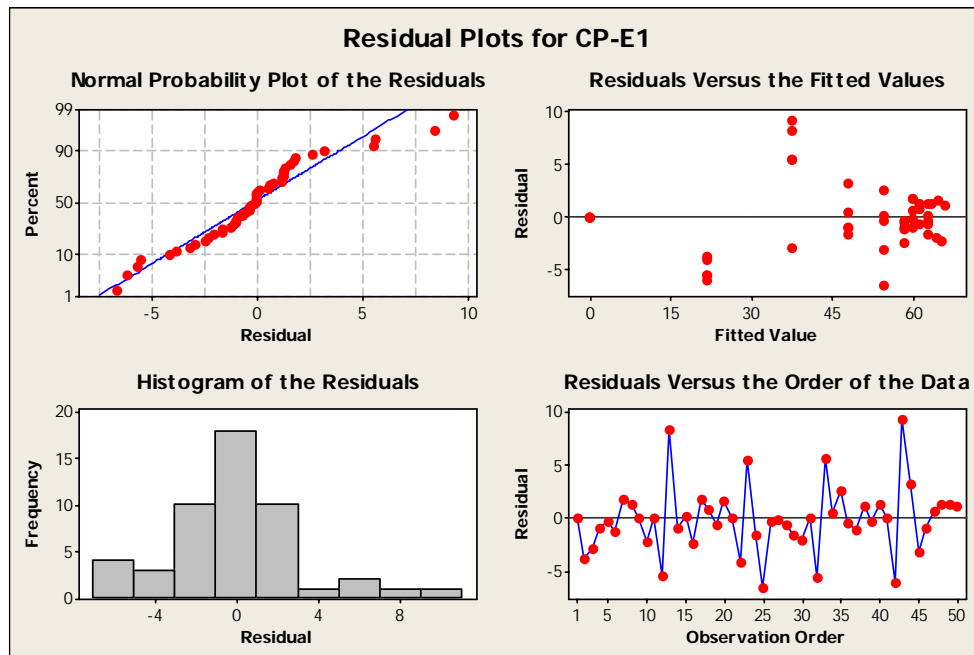


Figura 6.6

Para el esfuerzo CP-E1, se observa que los tres parámetros del modelo de regresión son altamente significativos, que el modelo es globalmente significativo ( $P = 0.000$ ). Que la desviación estándar del esfuerzo es 3.18821 MPa y que la hipótesis de bondad de ajuste se rechaza ( $P = 0.000$ ). No parece haber un problema grave de normalidad y los residuales muestran cierta tendencia a reducir su variación con respecto a los valores ajustados, cerca de la deformación de ruptura.

### Regression Analysis: CP-E2 versus CP-D2, CPD2cuad, CPD2cub

The regression equation is  
 CP-E2 = 25994 CP-D2 - 3842578 CPD2cuad + 1.95E+08 CPD2cub

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Noconstant				
CP-D2	25994.2	783.3	33.19	0.000
CPD2cuad	-3842578	255507	-15.04	0.000
CPD2cub	195285547	19944936	9.79	0.000

S = 2.97209

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	130417	43472	4921.42	0.000
Residual Error	47	415	9		
Lack of Fit	11	310	28	9.64	0.000

Pure Error	36	105	3
Total	50	130833	

5 rows with no replicates

Source	DF	Seq SS
CP-D2	1	120612
CPD2cuad	1	8958
CPD2cub	1	847

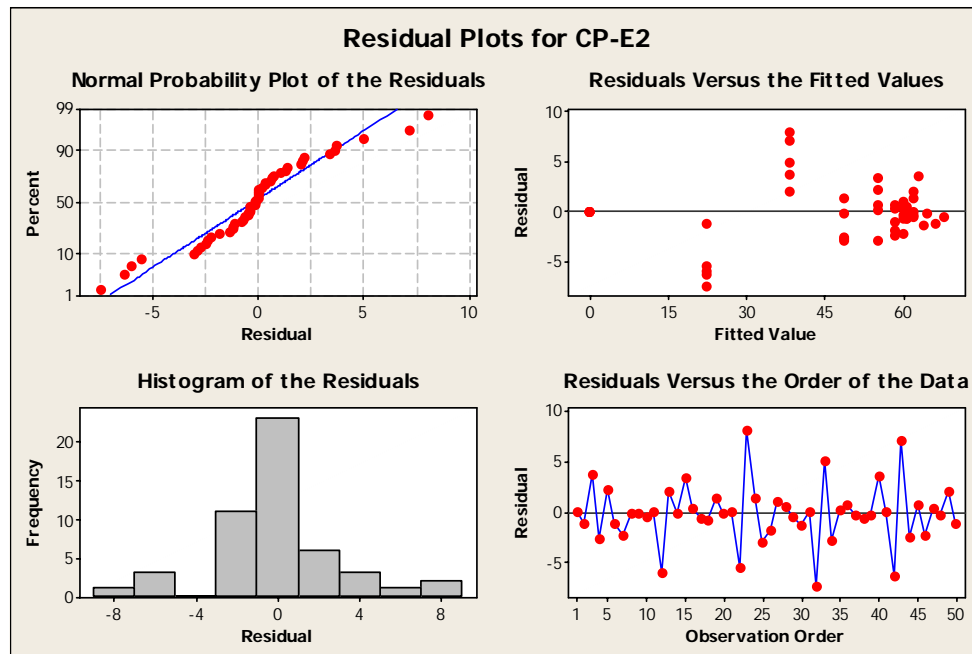


Figura 6.7

Para el esfuerzo CP-E2, se observa que los tres parámetros del modelo de regresión son altamente significativos, que el modelo es globalmente significativo ( $P = 0.000$ ). Que la desviación estándar del esfuerzo es 2.97209 MPa y que la hipótesis de bondad de ajuste se rechaza ( $P = 0.000$ ). No parece haber un problema grave de normalidad y los residuales muestran cierta tendencia a reducir su variación con respecto a los valores ajustados, cerca de la deformación de ruptura.

#### Regression Analysis: CP-PET-E1 versus CP-PET-D1, CPPETD1cuad, CPPETD1cub

The regression equation is  
 CP-PET-E1 = 28001 CP-PET-D1 - 2949234 CPPETD1cuad + 46193551 CPPETD1cub

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Noconstant				
CP-PET-D1	28001	1429	19.59	0.000
CPPETD1cuad	-2949234	677179	-4.36	0.000



CPPETDlcub 46193551 76230604 0.61 0.549

S = 3.04611

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	104730	34910	3762.33	0.000
Residual Error	32	297	9		
Lack of Fit	7	220	31	10.25	0.000
Pure Error	25	77	3		
Total	35	105027			

3 rows with no replicates

Source	DF	Seq SS
CP-PET-D1	1	99751
CPPETDlcuad	1	4975
CPPETDlcub	1	3

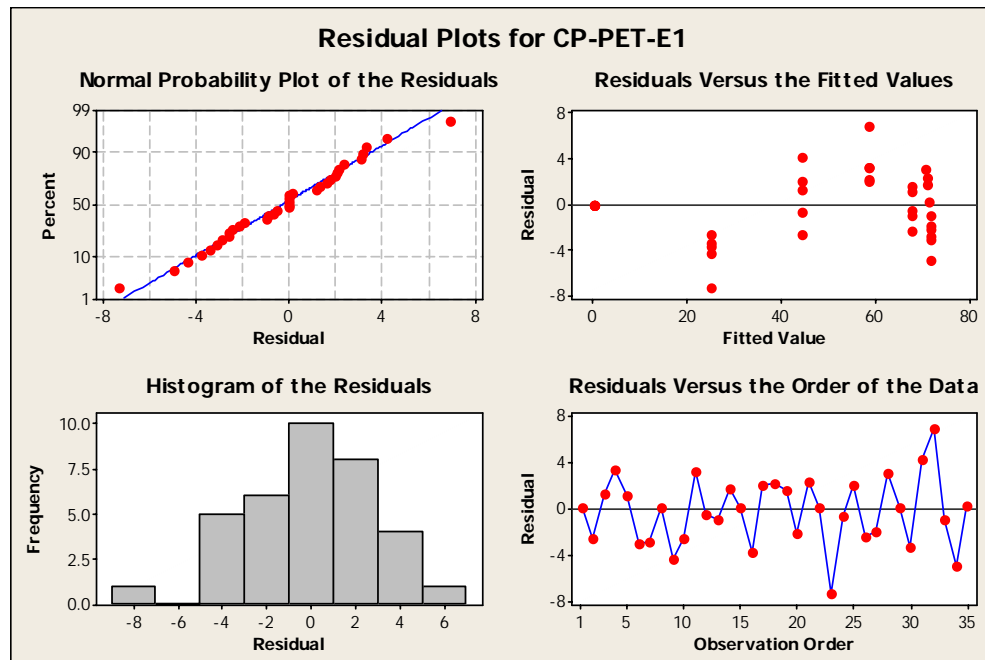


Figura 6.8

Para el esfuerzo CP-PET-E1, se observa que no se puede rechazar la hipótesis  $\beta_3 = 0$  ( $P = 0.549$ ), que el modelo es globalmente significativo ( $P = 0.000$ ).

Que la desviación estándar del esfuerzo es 3.04611 MPa y que la hipótesis de bondad de ajuste se rechaza ( $P = 0.000$ ). No parece haber un problema grave de normalidad y los residuales muestran cierta periodicidad.

## Regression Analysis: CP-PET-E2 versus CP-PET-D2, CPPETD2cuad, CPPETD2cub

The regression equation is

$$\text{CP-PET-E2} = 30944 \text{ CP-PET-D2} - 4130527 \text{ CPPETD2cuad} + 1.53\text{E}+08 \text{ CPPETD2cub}$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Noconstant				
CP-PET-D2	30944	1302	23.77	0.000
CPPETD2cuad	-4130527	633809	-6.52	0.000
CPPETD2cub	153202747	73708756	2.08	0.046

S = 2.68606

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	104671	34890	4835.85	0.000
Residual Error	32	231	7		
Lack of Fit	7	153	22	6.97	0.000
Pure Error	25	78	3		
Total	35	104901			

3 rows with no replicates

Source	DF	Seq SS
CP-PET-D2	1	99367
CPPETD2cuad	1	5272
CPPETD2cub	1	31

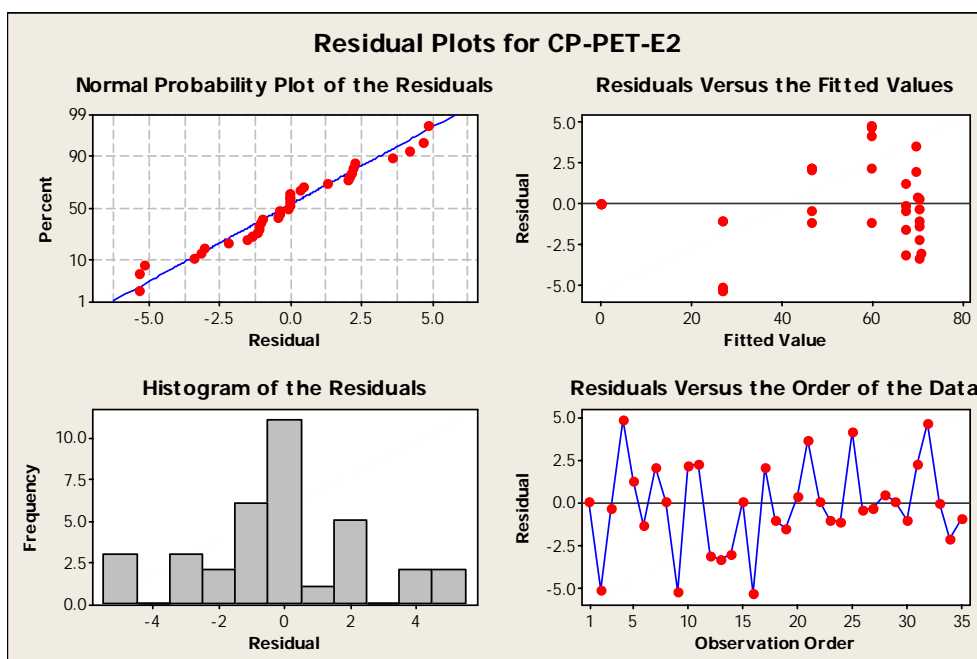


Figura 6.9

Para el esfuerzo CP-PET-E2, se observa que se puede rechazar la hipótesis  $\beta_3 = 0$  ( $P = 0.046$ ), que el modelo es globalmente significativo ( $P = 0.000$ ).

Que la desviación estándar del esfuerzo es 2.68606 MPa y que la hipótesis de bondad de ajuste se rechaza ( $P = 0.000$ ). No parece haber un problema grave de normalidad y los residuales muestran cierta periodicidad.

La siguiente gráfica, elaborada con MINITAB, muestra todos los datos y las seis cúbicas que han sido obtenidas con regresión sin ordenada al origen, para cada tipo y muestra de concreto.

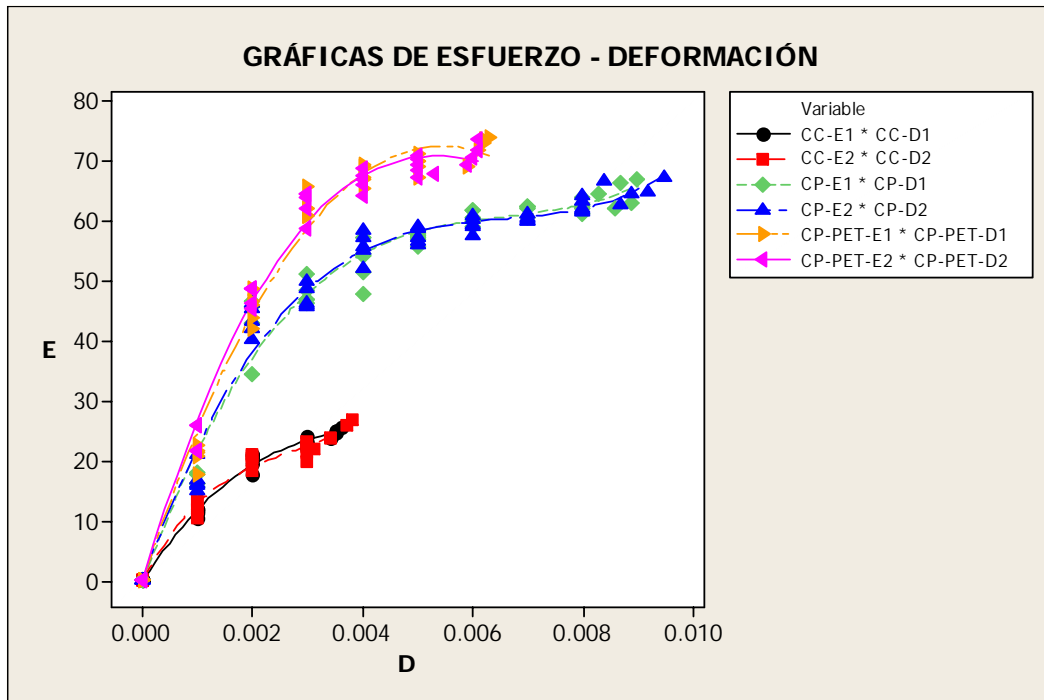


Figura 6.10

### ANÁLISIS DE ADECUACIÓN DEL MODELO.

Primero se debe hacer la siguiente prueba de hipótesis, para determinar si el modelo cúbico resulta significativo en cada caso:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \neq 0 \text{ al menos para una } j.$$

El estadístico de prueba es:

$$F_0 = \frac{VE/n}{VNE/(m-n)} = \frac{\sum_{i=1}^m (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 / n}{\sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{Y}_i)^2 / (m-n)} = \frac{SS_{REGR}/n}{SS_{RES}/(m-n)}$$

donde  $m$  es el número de observaciones y  $n$  es el número de variables regresoras para un modelo sin ordenada al origen.

Los valores del estadístico “F”, muestran que el modelo cúbico elegido en este caso es altamente significativo para CC1, CC2, CP1, CP2, CP-PET1 y CP-PET2:

MATERIAL	F	P
CC1	3273.71	0.000
CC2	2061.08	0.000
CP1	4255.09	0.000
CP2	4921.42	0.000
CP-PET1	3762.33	0.000
CP-PET2	4835.85	0.000

Tabla 6.5 Prueba de significancia del modelo

Ahora se hará la siguiente prueba de hipótesis para evaluar la significancia de cada parámetro:

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0$$

El estadístico de prueba es:

$$T_0 = \frac{\hat{\beta}_j - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} = \frac{\hat{\beta}_j - 0}{\sqrt{C_{jj}} \frac{SS_{RES}}{m-n}}$$

Los valores del estadístico “T”, muestran que el modelo cúbico elegido es altamente significativo para CC2, CP1, CP2 y CP-PET2, no así para CC1 ni CP-PET1. Sin embargo, se conservan los parámetros con baja significancia, porque el modelo cúbico se ajusta muy bien a los datos (hecho importante si se toma en cuenta que la Tenacidad se calcula como el área bajo la curva Esfuerzo – Deformación).

MATERIAL	PARÁMETRO	T	P
CC1	$\hat{\beta}_1$	14.19	0.000
	$\hat{\beta}_2$	-3.25	0.004
	$\hat{\beta}_3$	1.06	0.300

CC2	$\hat{\beta}_1$	15.23	0.000
	$\hat{\beta}_2$	-5.84	0.000
	$\hat{\beta}_3$	3.79	0.001
CP1	$\hat{\beta}_1$	28.23	0.000
	$\hat{\beta}_2$	-12.01	0.000
	$\hat{\beta}_3$	7.47	0.000
CP2	$\hat{\beta}_1$	33.19	0.000
	$\hat{\beta}_2$	-15.04	0.000
	$\hat{\beta}_3$	9.79	0.000
CP-PET1	$\hat{\beta}_1$	19.59	0.000
	$\hat{\beta}_2$	-4.36	0.000
	$\hat{\beta}_3$	0.61	0.549
CP-PET2	$\hat{\beta}_1$	23.77	0.000
	$\hat{\beta}_2$	-6.52	0.000
	$\hat{\beta}_3$	2.08	0.046

Tabla 6.6 Prueba de significancia de los parámetros

Ahora se hará una prueba de falta de ajuste, con el fin de comparar la proporción del error debido a falta de ajuste, con respecto al error puro. Una falta de ajuste indica que la mayor parte del error total se debe a falta de ajuste y que sólo una parte menor de tal error está ocupada por el error puro.

La prueba se basa en la división de la suma de cuadrados del error, en dos componentes: la suma de cuadrados debida al error puro y la suma de cuadrados debido a la falta de ajuste<sup>2</sup>.

$$VNE = SCE = SCEP + SCFA$$

$$SCE = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \hat{Y}_i)^2$$

$$SCEP = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$$

$$SCFA = \sum_{i=1}^m n_i (\bar{Y}_i - \hat{Y}_i)^2$$

La prueba de hipótesis es:

$$H_0 : \mu_{Y(x)} = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \text{ (La verdadera función de regresión es lineal).}$$

$$H_1 : \mu_{Y(x)} \neq \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \text{ (La verdadera función de regresión es no lineal).}$$

Con el estadístico:

$$F_0 = \frac{SC_{FA} / m - \sum_{k=1}^{nivrepl} (r_k - 1) - n}{SC_{EP} / \sum_{k=1}^{nivrepl} (r_k - 1)}$$

donde  $m$  es el número total de observaciones,  $r_k$  es el número de réplicas para el nivel  $k$  -ésimo,  $nivrepl$  es el número de niveles replicados y  $n$  es el número de parámetros del modelo de regresión sin ordenada al origen.

La prueba de falta de ajuste para CC1 y CC2 no permite rechazar la hipótesis de un buen ajuste. Para CP1, CP2, CP-PET1 y CP-PET2 se rechaza la hipótesis de un buen ajuste.

MATERIAL	F	P
CC1	1.88	0.157
CC2	2.15	0.108
CP1	5.49	0.000
CP2	9.64	0.000
CP-PET1	10.25	0.000
CP-PET2	6.97	0.000

Tabla 6.7 Prueba de falta de ajuste

Una falta de ajuste imposibilita al modelo para efectuar predicciones, pero esto no afecta los propósitos de este trabajo, porque sólo se harán evaluaciones en el rango de las observaciones.

Enseguida se presenta una tabla que resume el coeficiente de determinación para cada material, definido como el cuadrado de la correlación:

$$r^2 = \left[ \text{corr}(E, \hat{E}) \right]^2 = \left[ \frac{\text{cov}(E, \hat{E})}{\sigma_E \cdot \sigma_{\hat{E}}} \right]^2 = \frac{\left[ \sum_{i=1}^m (E_i - \bar{E})(\hat{E}_i - \bar{\hat{E}}) \right]^2}{\sum_{i=1}^m (E_i - \bar{E})^2 \sum_{i=1}^m (\hat{E}_i - \bar{\hat{E}})^2}$$

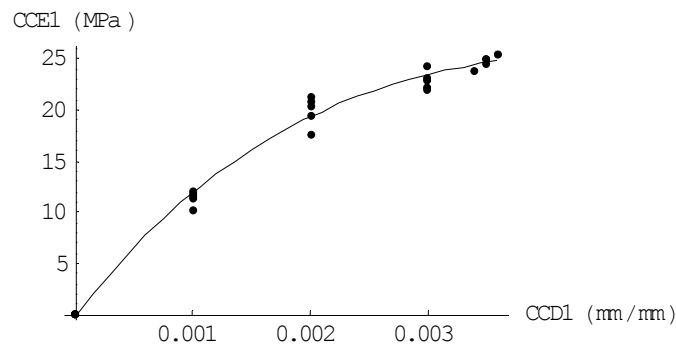
MATERIAL	$r^2$
CC1	0.99111
CC2	0.98554
CP1	0.97795
CP2	0.98081
CP-PET1	0.98784
CP-PET2	0.98996

Tabla 6.8 Coeficientes de determinación

Se puede ver que los ajustes son bastante buenos para el intervalo de deformaciones manejado.

## EVALUACIÓN DE LAS TENACIDADES.

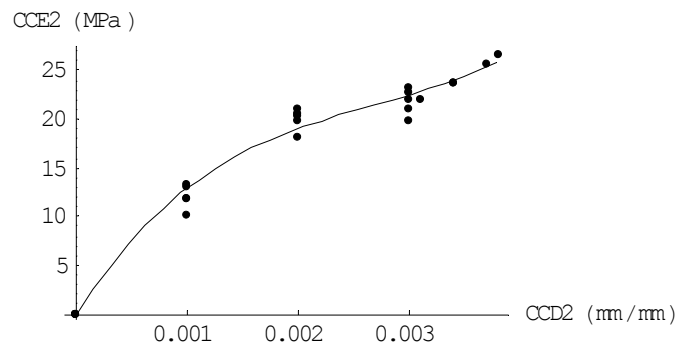
Para CC1:



$$Tl_{CC} = \int_0^{0.0036} (14399 D - 2718309 D^2 + 173544405 D^3) dD$$

$$T1_{cc} = 0.0583176 \text{MPa} \cdot \frac{\text{mm}}{\text{mm}} = 0.0583176 \frac{\text{MJoules}}{\text{m}^3}$$

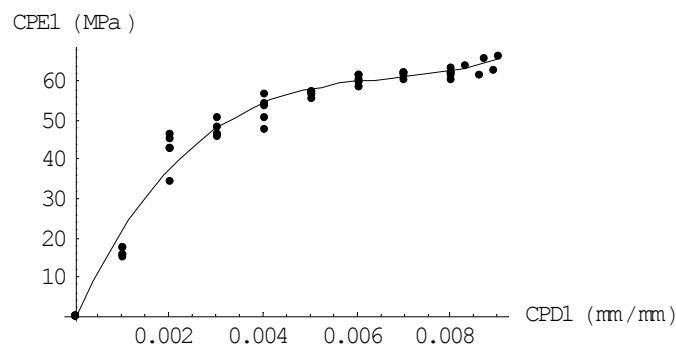
Para CC2:



$$T2_{cc} = \int_0^{0.0038} (17456 D - 5254521 D^2 + 644682655 D^3) dD$$

$$T2_{cc} = 0.0635299 \text{MPa} \cdot \frac{\text{mm}}{\text{mm}} = 0.0635299 \frac{\text{MJoules}}{\text{m}^3}$$

Para CP1:

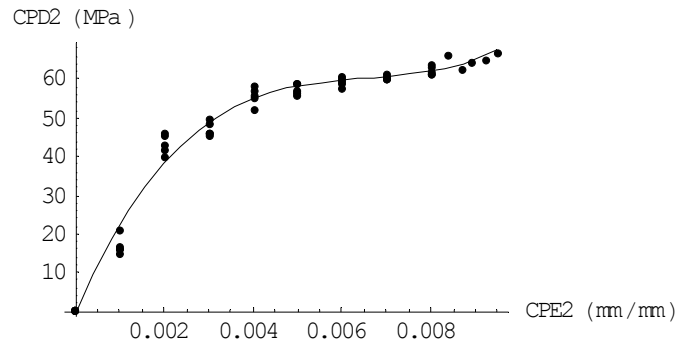


$$T1_{cp} = \int_0^{0.0090} (25204.2 D - 3623877 D^2 + 181588693 D^3) dD$$

$$T1_{cp} = 0.4380188 \text{MPa} \cdot \frac{\text{mm}}{\text{mm}} = 0.4380188 \frac{\text{MJoules}}{\text{m}^3}$$



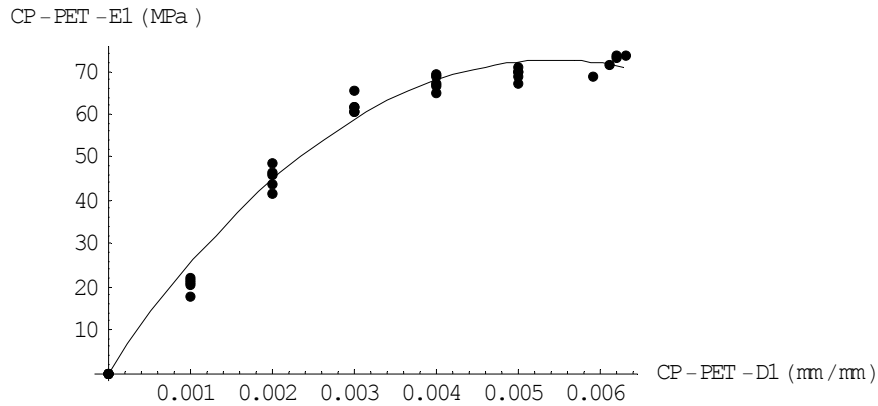
Para CP2:



$$T2_{cp} = \int_0^{0.0095} (25994.2 D - 3842578 D^2 + 195285547 D^3) dD$$

$$T2_{cp} = 0.4724648 MPa \cdot \frac{mm}{mm} = 0.4724648 \frac{MJoules}{m^3}$$

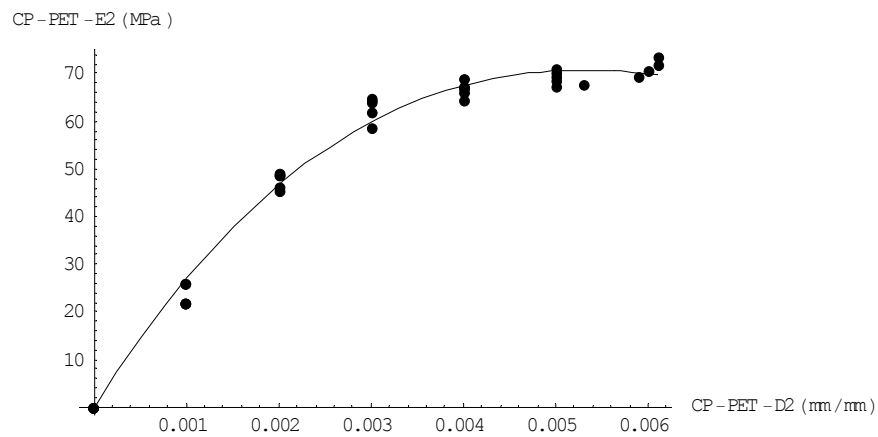
Para CPPET1:



$$T1_{cppet} = \int_0^{0.0063} (28001 D - 2949234 D^2 + 46193551 D^3) dD$$

$$T1_{cppet} = 0.3280563 MPa \cdot \frac{mm}{mm} = 0.3280563 \frac{MJoules}{m^3}$$

Para CPPET2:



$$T2_{cppet} = \int_0^{0.0061} (30944 D - 4130527 D^2 + 153202747 D^3) dD$$

$$T2_{cppet} = 0.3162266 \text{MPa} \cdot \frac{\text{mm}}{\text{mm}} = 0.3162266 \frac{\text{MJoules}}{\text{m}^3}$$

La siguiente tabla muestra un resumen del cálculo de las tenacidades:

MATERIAL	TENACIDAD (MJoules / m <sup>3</sup> )	TENACIDAD (Joules / m <sup>3</sup> )
CC1	0.0583176	58317.6
CC2	0.0635299	63529.9
CP1	0.4380188	438018.8
CP2	0.4724648	472464.8
CP-PET1	0.3280563	328056.3
CP-PET2	0.3162266	316226.6

Tabla 6.9 Tenacidades para los tres materiales

En esta tabla aparecen las desviaciones estándar y las varianzas para los esfuerzos (MPa):

MATERIAL	CC1	CC2	CP1	CP2	CPPET1	CPPET2
$\hat{\sigma}$	0.920400	1.14760	3.18821	2.97209	3.04611	2.68606
$\hat{\sigma}^2$	0.847136	1.316986	10.164683	8.833319	9.278786	7.214918

Tabla 6.10 Desviaciones estándar y varianzas estimadas para cada modelo

La siguiente tabla muestra las matrices de covarianzas  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ , calculadas con MATHEMATICA (ver la página 101 de este texto):

MATERIAL	Matriz de covarianzas
CC1	$\begin{pmatrix} 1.21528 \times 10^6 & -9.73081 \times 10^8 & 1.8154 \times 10^{11} \\ -9.73081 \times 10^8 & 8.26002 \times 10^{11} & -1.59602 \times 10^{14} \\ 1.8154 \times 10^{11} & -1.59602 \times 10^{14} & 3.15241 \times 10^{16} \end{pmatrix}$
CC2	$\begin{pmatrix} 997223. & -7.57906 \times 10^8 & 1.35732 \times 10^{11} \\ -7.57906 \times 10^8 & 6.1417 \times 10^{11} & -1.14613 \times 10^{14} \\ 1.35732 \times 10^{11} & -1.14613 \times 10^{14} & 2.1988 \times 10^{16} \end{pmatrix}$
CP1	$\begin{pmatrix} 78393.4 & -2.56755 \times 10^7 & 1.96119 \times 10^9 \\ -2.56755 \times 10^7 & 8.96089 \times 10^9 & -7.12096 \times 10^{11} \\ 1.96119 \times 10^9 & -7.12096 \times 10^{11} & 5.81126 \times 10^{13} \end{pmatrix}$
CP2	$\begin{pmatrix} 70504.1 & -2.23325 \times 10^7 & 1.65374 \times 10^9 \\ -2.23325 \times 10^7 & 7.54332 \times 10^9 & -5.8177 \times 10^{11} \\ 1.65374 \times 10^9 & -5.8177 \times 10^{11} & 4.61478 \times 10^{13} \end{pmatrix}$
CP-PET1	$\begin{pmatrix} 220207. & -1.01135 \times 10^8 & 1.08064 \times 10^{10} \\ -1.01135 \times 10^8 & 4.94214 \times 10^{10} & -5.48968 \times 10^{12} \\ 1.08064 \times 10^{10} & -5.48968 \times 10^{12} & 6.26278 \times 10^{14} \end{pmatrix}$
CP-PET2	$\begin{pmatrix} 234955. & -1.10785 \times 10^8 & 1.22039 \times 10^{10} \\ -1.10785 \times 10^8 & 5.56784 \times 10^{10} & -6.38609 \times 10^{12} \\ 1.22039 \times 10^{10} & -6.38609 \times 10^{12} & 7.53023 \times 10^{14} \end{pmatrix}$

Tabla 6.11 Matrices de covarianzas

## INTERVALOS DE CONFIANZA PARA LOS MODELOS DE REGRESIÓN.

En esta sección se elaborarán intervalos de confianza del  $(1 - 0.05)$  % para los tres parámetros de cada modelo de regresión. En la sección anterior, se ha calculado lo necesario para elaborar estos intervalos.

Los valores de  $t_{\frac{\alpha}{2}, m-n}$  para los diferentes tamaños de muestra son:

T:0.025,22=	2.4055
T:0.025,47=	2.3155
T:0.025,32=	2.3518

El intervalo de confianza para el parámetro  $\beta_j$  al  $(1 - \alpha)\%$ , es:

$$\hat{\beta}_j - t_{\frac{\alpha}{2}, m-n} \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}} \leq \beta_j \leq \hat{\beta}_j + t_{\frac{\alpha}{2}, m-n} \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}$$

Expresión en la que  $t_{\frac{\alpha}{2}, m-n}$  es el valor de la “T” de Student con  $m-n$  grados de libertad, para

una probabilidad  $P(t) \leq \frac{\alpha}{2}$  ó  $P(t) \geq \frac{\alpha}{2}$ .  $\beta_j$  es el parámetro poblacional.  $\hat{\beta}_j$  es el estimador del

parámetro  $j$  –ésimo del modelo y  $\hat{\sigma}^2$  es la varianza estimada para el modelo de regresión.

$C_{jj}$  es el elemento  $j$  –ésimo de la diagonal de la matriz de covarianzas,  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ .

Aquí se muestran los cálculos de los intervalos para cada parámetro:

$$\beta_{1CC1} = 14399 \pm 2.4055 \sqrt{0.847136 (1.21528 \times 10^6)}$$

$$11958.30 \leq \beta_{1CC1} \leq 16839.70$$

$$\beta_{2CC1} = -2718309 \pm 2.4055 \sqrt{0.847136 (8.26002 \times 10^{11})}$$

$$-4730488.39 \leq \beta_{2CC1} \leq -706129.61$$

$$\beta_{3CC1} = 173544405 \pm 2.4055 \sqrt{0.847136 (3.15241 \times 10^{16})}$$

$$-219550572.65 \leq \beta_{3CC1} \leq 566639382.65$$

$$\beta_{1CC2} = 17456 \pm 2.4055 \sqrt{1.316986 (997223)}$$

$$14699.32 \leq \beta_{1CC2} \leq 20212.68$$

$$\beta_{2CC2} = -5254521 \pm 2.4055 \sqrt{1.316986 (6.1417 \times 10^{11})}$$

$$-7417909.20 \leq \beta_{2CC2} \leq -3091132.80$$

$$\beta_{3CC2} = 644682655 \pm 2.4055 \sqrt{1.316986 (2.1988 \times 10^{16})}$$

$$235343752.15 \leq \beta_{3CC2} \leq 1054021557.85$$

$$\beta_{1CP1} = 25204.2 \pm 2.3155 \sqrt{10.164683 (78393.4)}$$

$$23137.25 \leq \beta_{1CP1} \leq 27271.15$$

$$\beta_{2CP1} = -3623877 \pm 2.3155 \sqrt{10.164683 (8.96089 \times 10^9)}$$

$$-4322697.62 \leq \beta_{2CP1} \leq -2925056.38$$

$$\beta_{3CP1} = 181588693 \pm 2.3155 \sqrt{10.164683 (5.81126 \times 10^{13})}$$

$$125312424.48 \leq \beta_{3CP1} \leq 237864961.52$$

$$\beta_{1CP2} = 25994.2 \pm 2.3155 \sqrt{8.833319 (70504.1)}$$

$$24166.89 \leq \beta_{1CP2} \leq 27821.51$$

$$\beta_{2CP2} = -3842578 \pm 2.3155 \sqrt{8.833319 (7.54332 \times 10^9)}$$

$$-4440282.39 \leq \beta_{2CP2} \leq -3244873.61$$

$$\beta_{3CP2} = 195285547 \pm 2.3155 \sqrt{8.833319 (4.61478 \times 10^{13})}$$

$$148535647.83 \leq \beta_{3CP2} \leq 242035446.17$$

$$\beta_{1CPPET1} = 28001 \pm 2.3518 \sqrt{9.278786 (220207)}$$

$$24639.23 \leq \beta_{1CPPET1} \leq 31362.77$$

$$\beta_{2CPPET1} = -2949234 \pm 2.3518 \sqrt{9.278786 (4.94214 \times 10^{10})}$$

$$-4541845.92 \leq \beta_{2CPPET1} \leq -1356622.08$$

$$\beta_{3CPPET1} = 46193551 \pm 2.3518 \sqrt{9.278786 (6.26278 \times 10^{14})}$$

$$-133088172.44 \leq \beta_{3CPPET1} \leq 225475274.44$$

$$\beta_{1CPPET2} = 30944 \pm 2.3518 \sqrt{7.214918 (234955)}$$

$$27881.93 \leq \beta_{1CPPET2} \leq 34006.07$$

$$\beta_{2CPPET2} = -4130527 \pm 2.3518 \sqrt{7.214918 (5.56784 \times 10^{10})}$$

$$-5621143.53 \leq \beta_{2_{CPPET2}} \leq -2639910.47$$

$$\beta_{3_{CPPET2}} = 153202747 \pm 2.3518 \sqrt{7.214918 (7.53023 \times 10^{14})}$$

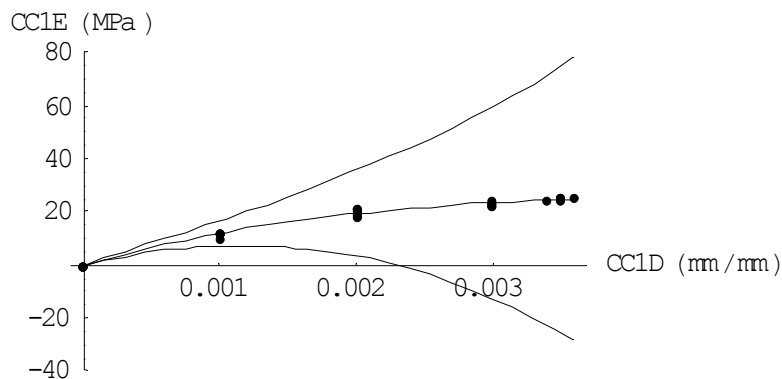
$$-20148384.84 \leq \beta_{3_{CPPET2}} \leq 326553878.84$$

Con estos intervalos de confianza, se pueden construir nuevas curvas, que permitirán calcular las tenacidades límite, alrededor de la tenacidad más probable en cada caso. Estos resultados se muestran a continuación gráficamente (se usará MATHEMATICA).

Por ejemplo, la curva superior de CC1 es:

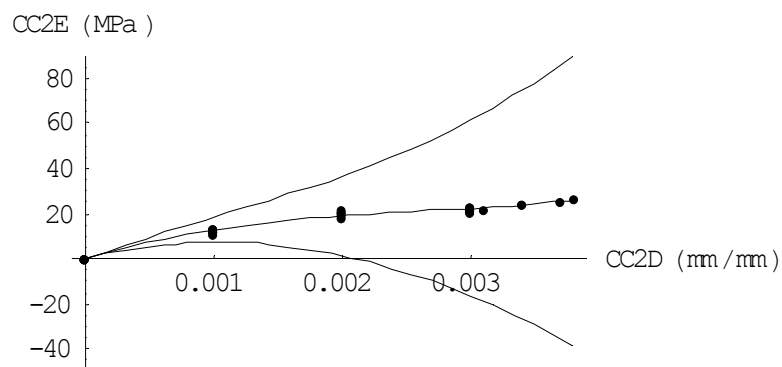
$$E_{CC1} = 16839.70D_{CC1} - 706129.61D_{CC1}^2 + 566639382.65D_{CC1}^3$$

Para CC1:



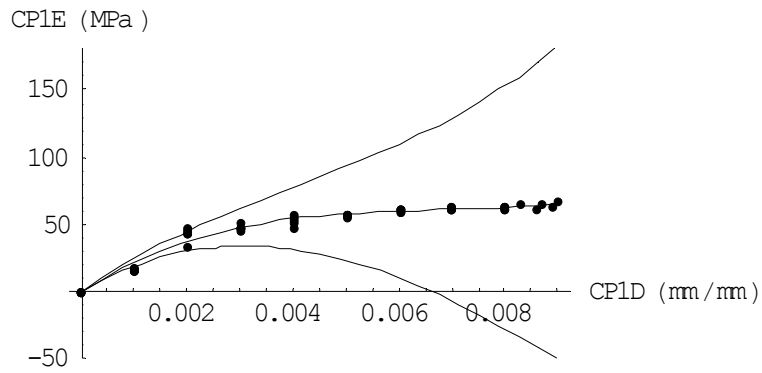
IC para tenacidad al 95%: [-0.0052978, 0.1219329]

Para CC2:



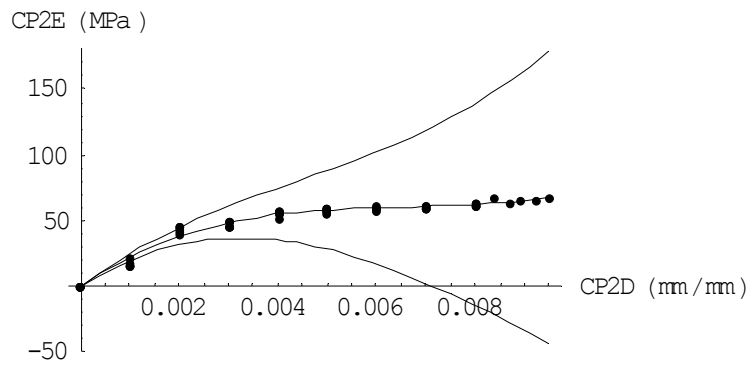
IC para tenacidad al 95%: [-0.0172813, 0.1443411]

Para CP1:



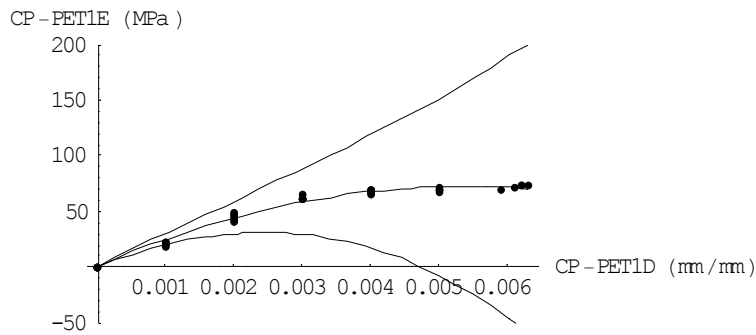
IC para tenacidad al 95%: [0.0921867, 0.7838509]

Para CP2:



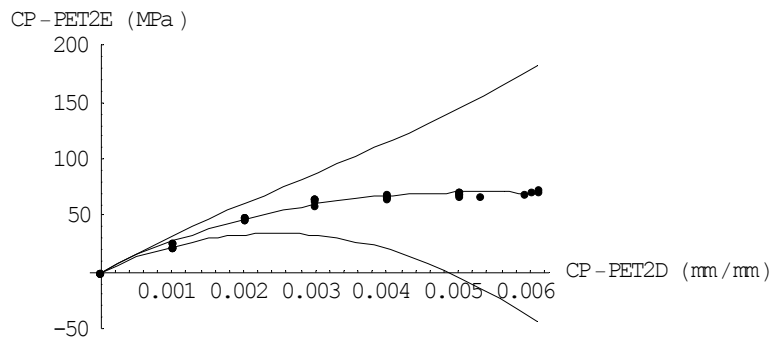
IC para tenacidad al 95%: [0.1239932, 0.8209363]

Para CPPET1:



IC para tenacidad al 95%: [0.0579939, 0.5981187]

Para CPPET2:



IC para tenacidad al 95%: [0.0864714, 0.5459818]

Es importante aclarar que los valores de los extremos de estos intervalos se calcularon como las áreas bajo las curvas construidas con los parámetros extraídos de los intervalos de confianza para  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\beta_3$ .

Se puede verificar que los promedios de los extremos de las tenacidades coinciden con los que se habían calculado originalmente, ya que las integrales son operadores lineales y este hecho justifica que los intervalos de las tenacidades también sean del 95%.

La siguiente tabla resume los intervalos de confianza del 95% para las tenacidades de cada muestra (los valores de tenacidad negativos deben ignorarse, surgen por la falta de ajuste):

MATERIAL	IC 95% TENACIDAD ( <i>Joules / m<sup>3</sup></i> )
CC1	58317.6 ± 63615.4
CC2	63529.9 ± 80811.2
CP1	438018.8 ± 345832.1
CP2	472464.8 ± 348471.6
CP-PET1	328056.3 ± 270062.4
CP-PET2	316226.6 ± 229755.2

Tabla 6.12 Intervalos de confianza para la tenacidad



### ANÁLISIS DE RESIDUALES.

En el Capítulo 5, se establecieron cinco premisas que debían quedar satisfechas para validar un modelo de regresión lineal múltiple:

1. La relación entre la respuesta y los regresores es lineal, al menos en forma aproximada.
2. El término de error  $\varepsilon$  tiene media cero.
3. El término de error  $\varepsilon$  tiene varianza  $\sigma^2$  constante.
4. Los errores no están correlacionados.
5. Los errores tienen distribución normal.

El primer supuesto parece cumplirse, pues las gráficas (que provienen de un modelo lineal) parecen ajustarse bien a las observaciones.

El segundo supuesto, no se cumplirá en nuestro modelo, ya que éste fue forzado a pasar por el origen, sin embargo, la suma de los residuales debe ser una cantidad “pequeña”.

La siguiente tabla muestra la suma de los residuales:

MATERIAL	Suma de Residuales (MPa)
CC1	-0.4701
CC2	-0.8262
CP1	-7.1452
CP2	-8.3363
CP-PET1	-9.0418
CP-PET2	-7.2910

Tabla 6.13 Suma de los residuales

Si observamos los esfuerzos de la Tabla 6.4, podemos decir que las sumas de residuales se mantienen suficientemente pequeñas, considerando que el modelo está forzado a pasar por el origen.

Las Figuras 6.4 a 6.9 (páginas: 133 a 139), muestran un análisis gráfico de residuales hecho con MINITAB<sup>4</sup> en el que esencialmente se observa que los residuales se distribuyen más o menos normalmente alrededor de cero, aunque hay algunos casos sesgados, no parece haber problema grave de normalidad.

No parece haber ninguna correlación entre el orden de las observaciones y los residuales.

Tampoco se ven problemas de correlación entre los residuales y los valores estimados con el modelo.

Y no hay evidencia clara de heteroscedasticidad, ya que los cambios en las varianzas de los residuales, para los diferentes niveles de deformación específica, no son muy grandes.

La siguiente tabla muestra tres diferentes pruebas de normalidad para los residuales, en las que la hipótesis nula es: “Los residuales tienen una distribución normal”.

MATERIAL	Anderson – Darling Valor P	Ryan – Joiner Valor P	Kolmogorov – Smirnov Valor P
CC1	0.133	> 0.100	> 0.150
CC2	0.326	> 0.100	> 0.150
CP1	< 0.005	< 0.010	< 0.010
CP2	< 0.005	< 0.010	0.031
CP-PET1	0.846	> 0.100	> 0.150
CP-PET2	0.202	> 0.100	> 0.150

Tabla 6.14

Se puede hablar de normalidad para CC y CP-PET, pero CP parece presentar cierta falta de normalidad, aunque este hecho no afecta mucho a nuestros fines, ya que la tenacidad mide la energía de deformación por unidad de volumen y la falta de normalidad en los residuales

de los esfuerzos afectaría sólo las predicciones de éstos para niveles mayores de deformación.

### COMPARACIÓN DE TENACIDADES.

En esta sección se hará un **Análisis de Varianza** para comparar los valores medios de las tenacidades de los tres tipos de concreto estudiados.

La prueba de hipótesis es:

$$H_0 : \mu_{T_{CC}} = \mu_{T_{CP}} = \mu_{T_{CP-PET}}$$

$$H_1 : \mu_{T_{CC}} \neq \mu_{T_{CP}} \neq \mu_{T_{CP-PET}} \text{ o para al menos una pareja de tenacidades}$$

El estadístico de prueba para el análisis de varianza se resume en la siguiente tabla:

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F <sub>0</sub>
Entre los tratamientos	$SS_{TOT} = n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2$	$a - 1$	$MS_{TRAT}$	$F_0 = \frac{MS_{TRAT}}{MS_E}$
Error (dentro de los tratamientos)	$SS_E = SS_{TOT} - SS_{TRAT}$	$N - a$	$MS_E$	
Total	$SS_{TOT} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2$	$N - 1$	<i>N</i> : número total de datos. <i>n</i> : número de datos por tratamiento. <i>a</i> : número de tratamientos.	

Tabla 6.15 Análisis de varianza

Aquí están los datos:

TENACIDADES	Tratamiento 1 (CC)	Tratamiento 2 (CP)	Tratamiento 3 (CP-PET)
T <sub>1</sub> (MJoules/m <sup>3</sup> )	0.0583176	0.4380188	0.3280563
T <sub>2</sub> (MJoules/m <sup>3</sup> )	0.0635299	0.4724648	0.3162266

Tabla 6.16 Valores de las tenacidades medias estimadas

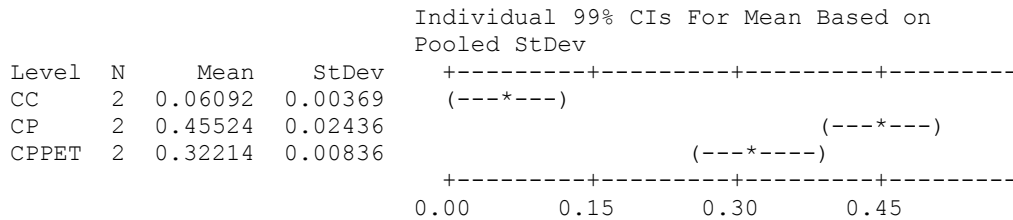
Ahora se muestra el análisis de varianza hecho con MINITAB:

#### One-way ANOVA: Tenacidad versus Trat

Source	DF	SS	MS	F	P
Trat	2	0.160958	0.080479	356.72	0.000
Error	3	0.000677	0.000226		

Total 5 0.161635

S = 0.01502 R-Sq = 99.58% R-Sq(adj) = 99.30%



Pooled StDev = 0.01502

Como puede verse, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los tres tratamientos son significativamente diferentes.

Ahora se efectuarán dos análisis de comparaciones múltiples para los promedios de las tenacidades de cada combinación binaria de materiales.

### Prueba de Tukey.

En esta prueba, el nivel de significación global es exactamente  $\alpha$  cuando los tamaños de las muestras son iguales y es a lo sumo  $\alpha$  cuando son diferentes.

El procedimiento de Tukey hace uso de la distribución del estadístico del rango studentizado:  $q = \frac{\bar{y}_{\max} - \bar{y}_{\min}}{\sqrt{MS_E/n}}$  donde  $\bar{y}_{\max}$  y  $\bar{y}_{\min}$  son las medias muestrales mayor y menor, respectivamente, sacadas de un grupo de  $p = a$  medias muestrales. La tabla VIII del apéndice de la referencia 1 de este capítulo, contiene los valores de  $q_\alpha(p, f)$ , los puntos porcentuales  $\alpha$  superiores de  $q$ , donde  $f = N - a$  es el número de grados de libertad asociados con  $MS_E$ . Para tamaños de las muestras iguales, la prueba de Tukey declara que dos medias son significativamente diferentes si el valor absoluto de sus diferencias muestrales excede:

$$T_\alpha = q_\alpha(a, f) \sqrt{\frac{MS_E}{n}}$$

Cuando las muestras son de diferente tamaño:

$$T_\alpha = \frac{q_\alpha(a, f)}{\sqrt{2}} \sqrt{MS_E \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

Los intervalos de confianza quedan:

$$\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot} - T_\alpha \leq \mu_i - \mu_j \leq \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot} + T_\alpha \quad ; \quad i \neq j$$

He aquí los resultados obtenidos con MINITAB:

Tukey 99% Simultaneous Confidence Intervals  
All Pairwise Comparisons among Levels of Trat

Individual confidence level = 99.51%

Trat = CC subtracted from:

Trat	Lower	Center	Upper
CP	0.28152	0.39432	0.50711
CPPET	0.14842	0.26122	0.37401

Trat = CP subtracted from:

Trat	Lower	Center	Upper
CPPET	-0.24589	-0.13310	-0.02031

Calculemos  $T_{0.01} = \frac{q_{0.01}(0.01, 6-3)}{\sqrt{2}} \sqrt{0.000226 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)} = \frac{10.6}{\sqrt{2}} \sqrt{0.000226} = 0.1127$ .

Nota: el valor 10.6 fue extraído de la tabla VIII del apéndice de la referencia 1 de este capítulo.

Como:

$$MS_{CP} - MS_{CC} = 0.45524 - 0.06092 = 0.39432 > 0.1127$$

$$MS_{CPPET} - MS_{CC} = 0.32214 - 0.06092 = 0.26122 > 0.1127$$

$$MS_{CP} - MS_{CPPET} = 0.45524 - 0.32214 = 0.13310 > 0.1127$$

Se concluye que las tres diferencias son significativas.

### Prueba de Fisher (método de la diferencia significativa mínima).

Este procedimiento usa el estadístico:

$$t_0 = \frac{\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{j\bullet}}{\sqrt{MS_E \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}}$$

para probar:  $H_0 : \mu_i = \mu_j$ , suponiendo una hipótesis alternativa de dos colas, los pares de medias  $\mu_i$  y  $\mu_j$  se declararían significativamente diferentes si:

$$|\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{j\bullet}| > t_{\alpha/2, N-a} \sqrt{MS_{RE} \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}.$$

A la cantidad  $DSM = t_{\alpha/2, N-a} \sqrt{MS_{RE} \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$  se le llama diferencia significativa mínima.

He aquí los resultados de MINITAB:

Fisher 99% Individual Confidence Intervals  
All Pairwise Comparisons among Levels of Trat

Simultaneous confidence level = 97.97%

Trat = CC subtracted from:

Trat	Lower	Center	Upper
CP	0.30659	0.39432	0.48205
CPPET	0.17349	0.26122	0.34895

-+-----+-----+-----+-----+  
 (----\*----)  
 (----\*----)  
 -+-----+-----+-----+-----+  
 -0.20      0.00      0.20      0.40

Trat = CP subtracted from:

Trat	Lower	Center	Upper
CPPET	-0.22083	-0.13310	-0.04537

-+-----+-----+-----+-----+  
 (----\*----)  
 -+-----+-----+-----+-----+  
 -0.20      0.00      0.20      0.40

Calculemos DSM:

$$DSM = t_{0.005,3} \sqrt{MSE \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} = 7.4532 \sqrt{0.000226 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)} = 0.1120$$

De la tabla de MINITAB, se extrae que:

$$MS_{CP} - MS_{CC} = 0.45524 - 0.06092 = 0.39432 > 0.1120$$

$$MS_{CPPET} - MS_{CC} = 0.32214 - 0.06092 = 0.26122 > 0.1120$$

$$MS_{CP} - MS_{CPPET} = 0.45524 - 0.32214 = 0.13310 > 0.1120$$

Lo cual implica que las tres comparaciones resultan con diferencias significativas.

**Referencias de este capítulo.**

1. Diseño y Análisis de Experimentos. Douglas C. Montgomery. Ed. Limusa – Wiley.
2. Introducción al análisis de regresión lineal. Montgomery. Peck. Vining. Ed. CECSA.
3. The MATHEMATICA Book. Wolfram Research.
4. Help. MINITAB.





## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Dados los resultados obtenidos en el Capítulo 6, se concluye que existen diferencias significativas entre los tres materiales estudiados, con un nivel de significancia  $\alpha = 0.01$ .

RELACIÓN ENTRE LAS TENACIDADES MEDIAS DE CADA COMBINACIÓN DE MATERIALES
$T_{CPP} / T_{CC} = 5.29$
$T_{CP} / T_{CC} = 7.47$
$T_{CP} / T_{CP-PET} = 1.41$

En la Hipótesis de Investigación (página 5), se anotaron las siguientes afirmaciones:

1. La tenacidad del Concreto Polimérico elaborado con polímeros obtenidos del reciclado de envases de PET no presenta diferencias significativas con respecto a la tenacidad del Concreto Polimérico elaborado con polímeros especiales para este fin.

Esta afirmación resultó falsa a la luz de los resultados del capítulo 6, ya que el concreto CP y el concreto CP-PET mostraron diferencias significativas al 1%.

Es claro, de la tabla anterior, que el Concreto Polimérico elaborado con un polímero específico para tal fin, supera la tenacidad del Concreto Polimérico elaborado con el reciclado de botellas de PET en un 41%.

2. La tenacidad de cualquiera de los Concretos Poliméricos supera la tenacidad del Concreto elaborado con Cemento Pórtland.

Esta afirmación resultó cierta, ya que se observaron diferencias significativas al 1% para todas las combinaciones de materiales y, además, los dos primeros renglones de la tabla

anterior, muestran que ambos tipos de Concreto Polimérico son más tenaces que el Concreto Pórtland (5.29 y 7.47 veces).

3. La relación beneficio–costo para los concretos poliméricos elaborados con polímeros obtenidos del reciclado de envases de PET, puede permitir su uso en la industria de la construcción, si el Gobierno Federal está realmente interesado en resolver el problema de desechos de envases de PET.

Como ya se mencionó, la tenacidad del concreto elaborado con cemento Pórtland es menor que la de ambos tipos de Concreto Polimérico y, además, se puede decir que está muy por debajo.

También se afirmó ya que el concreto polimérico obtenido del reciclado de botellas fabricadas con PET, muestra menor tenacidad que el concreto polimérico elaborado con polímeros comerciales, y queda ahora claro que la diferencia no es tan drástica.

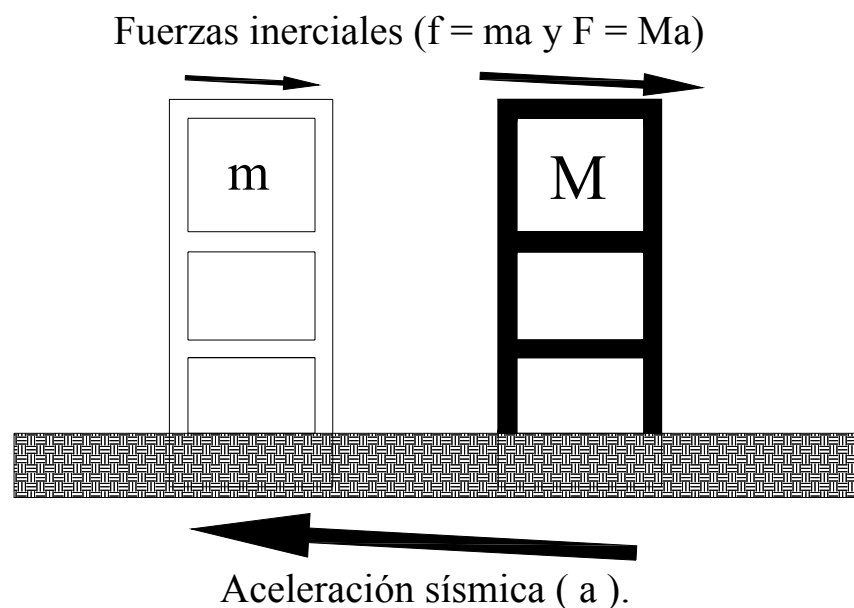
El concreto polimérico CP, tiene un costo por unidad de volumen del orden de cinco veces que el concreto elaborado con cemento Pórtland, pero su mayor tenacidad (del orden de siete veces), puede justificar su empleo en estructuras masivas, ya que se pueden fabricar elementos huecos armados con materiales como el Kevlar, en lugar de elementos sólidos armados con varillas de acero.

El concreto polimérico CP-PET, tiene poco más de cinco veces la tenacidad que tiene el concreto elaborado con cemento Pórtland y es difícil justificar económicamente su uso en lugar del concreto polimérico CP, ya que este último supera en tenacidad a aquél en casi una y media veces.

Lo que es definitivo, es que el uso del concreto polimérico elaborado con PET, a pesar de ser costoso, puede sustituir algunas estructuras de concreto elaborado con cemento Pórtland con ventajas tales como mayor tenacidad (del orden de cinco veces), impermeabilidad y mejores propiedades dieléctricas. Además de que se estaría atacando parte del problema de desechos sólidos no biodegradables.

Es muy importante mencionar el punto de vista sísmico: el hecho de contar con materiales que absorben de cinco a siete veces más energía de deformación por unidad de volumen, permite la elaboración de estructuras hechas con elementos huecos de Concreto Polimérico (armados con Kevlar, por ejemplo), por supuesto muchísimo más ligeras que las de elementos sólidos de Concreto Pórtland (armado con acero).

Este hecho, impide que las aceleraciones sísmicas provoquen grandes fuerzas inerciales sobre las estructuras.



Si el Gobierno Federal está interesado en resolver parte del problema de desechos sólidos, reciclando botellas de PET, debería fomentar el uso del CP-PET, a través de estímulos fiscales para las compañías constructoras, pero antes, debe contar con un nuevo Reglamento de Construcciones que incluya este tipo de materiales y una filosofía de diseño que permita el dimensionamiento de elementos estructurales huecos de pared delgada.

Por lo anterior, la afirmación 3, se valida, ya que con la intervención del Gobierno Federal, es posible que las compañías constructoras obtengan una utilidad atractiva, sustituyendo obras civiles de CC por obras civiles de CP-PET de elementos estructurales huecos.

Tal utilidad tendría esencialmente las siguientes fuentes:

- El pequeño ahorro que se logra al disminuir los volúmenes a poco menos de la quinta parte, cuando se suple CC por CP-PET, ya que éste es 5.29 veces más tenaz que aquél (a pesar de que, en cantidades pequeñas, el CP-PET es cinco veces más caro que el CC).
- El ahorro en el cimbrado, ya que los tiempos de fraguado del CC son mucho mayores que los tiempos de reacción de entrecruzamiento para el CP-PET.
- El ahorro por estímulos fiscales.

En cuanto al problema de que los concretos poliméricos tienen un módulo de dilatación térmica mayor que el del concreto elaborado con cemento Pórtland, puede resolverse fácilmente, tomando en cuenta esta diferencia en el análisis y diseño de elementos donde estas dilataciones o contracciones puedan causar daños.

Dejamos hasta aquí este trabajo, quedando pendiente la investigación de un posible retardo en la acción del agente de entrecruzamiento en los concretos poliméricos, ya que un fraguado demasiado rápido puede provocar gradientes térmicos dañinos para el mismo material (véase el Alcance de esta tesis en la página 5).