

FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS EN FLUIDOS:  
UN ENFOQUE BASADO EN LA HIDRODINAMICA RELATIVISTA

# UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA

Estudios con Reconocimiento de Validez Oficial por el Decreto Presidencial  
del 3 de abril de 1981



LA VERDAD  
NOS HARÁ LIBRES

UNIVERSIDAD  
IBEROAMERICANA

CIUDAD DE MÉXICO ®

“FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS EN FLUIDOS:  
UN ENFOQUE BASADO EN LA HIDRODINÁMICA RELATIVISTA”.

TESIS

Que para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

Presenta

JOSE HUMBERTO MONDRAGON SUAREZ

Director: Dr. Alfredo Sandoval Villalbazo  
Lectora: (Codirectora) Ana Laura García Perciante  
Lector: Guillermo Chacón Acosta

México, D.F.

2014

# CONTENIDO

<b>Resumen</b> .....	2
<b>Introducción</b> .....	3
<b>Capítulo I. Antecedentes</b> .....	7
I.1    LA INESTABILIDAD DE JEANS (no relativista).....	7
I.1.1    Formalismo básico (fenomenológico).....	8
I.2    FORMALISMO EN PRESENCIA DE DISIPACIÓN.....	11
I.2.1    Ecuaciones constitutivas.....	12
I.2.2    Ecuaciones linealizadas.....	12
<b>Capítulo II. Fundamentos microscópicos de la teoría de transporte no relativista</b>	16
II.1    ECUACIÓN DE BOLTZMANN.....	16
II.2    ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE ENSCKOG.....	18
II.2.1    Ecuaciones de conservación.....	20
II.2.2    Ecuaciones constitutivas.....	22
<b>Capítulo III. Elementos de teoría cinética relativista</b> .....	23
III.1    ECUACIÓN DE BOLTZMANN EN NOTACION TENSORIAL.....	23
III.2    ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE ENSKOG.....	24
III.2.1    Ecuaciones constitutivas.....	28
<b>Capítulo IV. Análisis de la inestabilidad de Jeans utilizando la ecuación propuesta por Eckart</b> .....	32
IV.1    ECUACIONES CONSTITUTIVAS.....	35
IV.2    ECUACIONES LINEALIZADAS.....	36
IV.3    ECUACIONES DE DISPERSIÓN.....	37

<b>Capítulo V. Análisis de la inestabilidad de Jeans utilizando la ecuación constitutiva obtenida a partir de la teoría cinética (ecuación GSG).....</b>	<b>40</b>
V.1 ECUACIÓN CONSTITUTIVA.....	40
V.2 ECUACIONES LINEALIZADAS.....	41
V.3 ECUACIÓN DE DISPERSIÓN.....	42
<b>Capítulo VI. Conclusiones y perspectivas.....</b>	<b>47</b>
<b>Apéndice.....</b>	<b>50</b>
<b>Referencias.....</b>	<b>55</b>

Formación de estructuras en fluidos: un enfoque basado en la hidrodinámica  
relativista

Tesis que para optar por el grado de DOCTOR EN CIENCIAS  
DE LA INGENIERÍA presenta José Humberto Mondragón Suárez  
*Universidad Iberoamericana, Ciudad de México.*

# Resumen

*Se presenta en este trabajo un estudio detallado acerca del problema de la inestabilidad gravitacional en fluidos relativistas incluyendo disipación (viscosidad y flujo de calor). La motivación detrás de ello, es que la dinámica de fluidos “calientes” sujetos a un campo gravitacional débil, es un tema que no ha sido explorado completamente y se considera que los resultados encontrados permiten aclarar dicha problemática. Ya que dejan ver que la discusión existente en torno a “¿cuál es la forma correcta de la ecuación constitutiva para el flujo de calor?”, misma que es necesaria para establecer las ecuaciones hidrodinámicas, puede terminar si se utiliza la ecuación obtenida de la teoría cinética. Esto, debido a que su representación en términos de gradientes a primer orden de las variables termodinámicas locales, elimina las inconsistencias que aparecen al usar el formalismo propuesto por Eckart [7]. Por ello, se aborda el problema de la inestabilidad de Jeans en el contexto de la formación de estructuras por medio de un formalismo perturbativo, utilizando ambas formulaciones para las ecuaciones constitutivas, la de C. Eckart y la de primer orden en los gradientes. Se muestra que existe una diferencia significativa en las predicciones correspondientes a cada caso, alcanzándose el objetivo particular propuesto en este trabajo. En particular, será interesante valorar si es posible utilizar los efectos relativistas (relatividad especial) en un gas en favor de la estabilidad y eventualmente su confinamiento para el caso ionizado relativista.*

*Adicionalmente, se presentan los desarrollos pertinentes y los resultados respecto al estudio de la inestabilidad de Jeans en fluidos no relativistas, considerando fluctuaciones de la temperatura y efectos disipativos, pretendiendo con esto, dar un panorama general de la evolución de esta problemática.*

## INTRODUCCIÓN

Existen diferentes posturas respecto al estudio de la formación de estructuras en el universo. Los modelos cosmológicos más aceptados hasta ahora, están basados en la aproximación de una expansión adiabática y su estudio se ha realizado via el análisis de pequeñas fluctuaciones en la densidad (criterio de inestabilidad de Jeans) [1, 2]. Sin embargo, debido a las mediciones de la radiación de fondo, la formación de estructuras se ha abordado considerando procesos disipativos y otras posibles fuentes de anisotropías. Actualmente, los modelos considerados indican que para que exista congruencia con lo observado, se requiere proponer la existencia de materia y/o energía oscura. Bajo esta óptica el universo conocido de acuerdo a las observaciones y teorías establecidas, se muestra como un universo dinámico y ordenado, *regido principalmente por fuerzas gravitacionales*, el cual está constituido por diferentes estructuras. Por orden de tamaño y/o masa, se tienen primeramente planetas, estrellas y sistemas solares. En el siguiente nivel, el de las estructuras intermedias, se tienen a las galaxias, cúmulos y supercúmulos de galaxias. Finalmente, también se han observado las llamadas murallas descubiertas recientemente, las cuales son presentadas como las más antiguas y grandes del universo y están constituidas por enormes franjas de supercúmulos de galaxias, con dimensiones del orden de 1370 millones de años luz [3]. Así, miles de millones de años después de la “gran explosión”, el universo observable adquirió la estructura que ahora presenta.

La formación de estructuras estelares se ha intentado explicar cualitativamente en una primera aproximación bajo un enfoque clásico *considerando principalmente efectos gravitacionales*, visualizando a la materia cósmica como un fluido hidrodinámico en equilibrio termodinámico local [4, 5]. La hipótesis inicial consiste en suponer que existe un mecanismo que genera una serie de perturbaciones en las variables termodinámicas locales, en particular las fluctuaciones de la densidad, las cuales pueden evolucionar por la vía de un colapso gravitacional hasta formar la estructura, siendo la fuerza de gravitación la que determina la evolución de estas fluctuaciones. En el caso de considerarse la formación de estructuras bajo un tratamiento basado en la relatividad general, no solo se considera que fluctúan las variables del fluido, sino también el espacio-tiempo que hace las veces de la interacción gravitacional. También se puede observar que si se considera solo la materia y no la radiación, los tratamientos relativista y no relativista dan resultados cualitativamente semejantes, re-

cobrándose el comportamiento clásico si se trabaja el régimen relativista y se considera el límite no relativista apropiado.

Desde hace décadas un gran número de investigadores han estudiado el fenómeno de la formación de estructuras estelares, partiendo del análisis de los modos hidrodinámicos relacionados con condiciones de inestabilidad en su formación, utilizando las ecuaciones hidrodinámicas acopladas al campo gravitacional [4–6]. Así, el estudio de la formación de estructuras astrofísicas ha motivado el desarrollo y la creación de teorías que involucran fluidos, mecanismos de transporte, termodinámica irreversible, relatividad especial y general, etc. En este contexto los investigadores han utilizado conceptos e hipótesis que actualmente, gracias a la infraestructura tecnológica desarrollada, pueden ser factibles de corroborarse numéricamente o con los datos de las observaciones directas e indirectas. En nuestro caso, pensamos que estudiar la inestabilidad de Jeans en el contexto de la formación de estructuras considerando la dinámica de fluidos relativistas bajo la acción de un campo gravitacional débil, es un tema interesante que puede aportar nuevos elementos que aclaren esta problemática. Se espera después de haber valorado los resultados, contribuir con información importante sobre el comportamiento de los efectos relativistas en un gas en favor de la estabilidad de estructuras y eventualmente el confinamiento para el caso ionizado. En este sentido, pensamos que el trabajo es original y reviste gran interés. Cabe señalar que este trabajo se desarrolló haciendo el análisis de la inestabilidad gravitacional en fluidos simples, no degenerados, relativistas (altas temperaturas), inmersos en campos gravitacionales débiles y considerando efectos disipativos (flujo de calor y viscosidad).

Sin embargo, algunos de los formalismos utilizados muestran que varios de los supuestos predicen comportamientos en los sistemas físicos analizados que difieren por varios órdenes de magnitud respecto de los observados, lo que dió cabida a incursionar en un camino que permita la revisión de las teorías utilizadas hasta ahora. Esta búsqueda nos llevó a la revisión de la forma correcta de la ecuación constitutiva para el flujo de calor, utilizada para completar el sistema de ecuaciones de transporte. Ya que por ejemplo en el campo de la hidrodinámica relativista, se pueden encontrar artículos como el de Eckart [7] o como la sección de fluidos relativistas incluida en el libro de texto de mecánica de fluidos de Landau-Lifshitz [8]. De cuyos resultados surgieron serias dudas acerca de las propiedades de estabilidad y causalidad en las ecuaciones linealizadas de transporte. La más importante falla del formalismo de Eckart fue señalada por Hiscock y Lindblom, que muestran escalas de tiempo muy

pequeñas al describir la dinámica de las fluctuaciones, mismas que no son observadas en la naturaleza [9]. Lo anterior nos motivó a retomar esta problemática, encontrándose que *el llamado problema de estabilidad en la hidrodinámica relativista se presenta debido a la forma como Eckart introduce la ecuación constitutiva del flujo de calor, la cual acopla este flujo con la aceleración hidrodinámica* [7]. En este contexto, la ecuación constitutiva propuesta no parece ser la apropiada para explicar el comportamiento observado, aún con los intentos de preservarla agregando términos correctivos o bien trabajando el sistema de ecuaciones considerando aproximaciones de orden superior [10, 11]. Adicionalmente esta ecuación, obtenida fenomenológicamente, no está sustentada de manera consistente por medio de la teoría cinética. Por lo anterior el grupo del Dr. Leopoldo García-Colín abordó la problemática proponiendo una nueva ecuación constitutiva para el flujo de calor, en términos de los gradientes de temperatura y densidad, obtenida de la teoría cinética y encontrando que con ella se resuelven las inconsistencias observadas, utilizando exclusivamente gradientes de variables termodinámicas a primer orden [12]. Cabe mencionar que Israel y de Groot encontraron anteriormente expresiones similares en términos de gradientes de potencial químico y presión hidrostática respectivamente [13, 14].

En la realización de este trabajo se propusieron y alcanzaron dos objetivos principales: el primero, determinar si es posible modelar el inicio de la formación de estructuras astrofísicas utilizando el formalismo propuesto por Eckart, considerando como valor de referencia el número de onda de Jeans, encontrando resultados patológicos. El segundo objetivo consistió en determinar si prevalecen las inconsistencias al utilizar una ecuación constitutiva modificada, la cual en adelante se denominará ecuación GSG (García-Colín, Sandoval-Villalbaz, García-Perciante). El resultado obtenido es muy importante, pues se encuentra que las patologías desaparecen. Los desarrollos correspondientes están contenidos en la presente tesis.

Para alcanzar estos objetivos se siguió un proceso ordenado, el cual constó de tres etapas. La primera, tras la presentación de un panorama general referente a la inestabilidad de Jeans, corresponde a la fundamentación microscópica apropiada para este trabajo de las ecuaciones de transporte empleadas en la descripción del inicio del colapso gravitacional.

La segunda etapa aborda la formación de estructuras astrofísicas, considerando altas temperaturas, flujo de calor y la viscosidad, es decir, efectos disipativos, utilizándose para ello el bien conocido formalismo de Eckart (1940). Esta parte del trabajo arroja resultados no observados en la naturaleza, perdiéndose los efectos gravitacionales en la formación de

estructuras y prediciéndose un efecto dominante causado por contrapartes térmicas.

En la siguiente y última etapa, siguiendo un procedimiento similar pero introduciendo la nueva ecuación constitutiva, se recupera el efecto gravitacional como principal agente de formación de dichas estructuras, obteniéndose pequeñas correcciones al número de ondas de Jeans.

Este proceso se presenta en el siguiente formato. Se incluye primeramente un *resumen*, a continuación esta *introducción*, en la que se incluyó una contextualización de la motivación del trabajo y se indentificaron los objetivos buscados, resaltándose la relevancia del tema. En los *antecedentes*, se da una breve introducción al problema de la inestabilidad de Jeans, mostrando sus hipótesis y sus parámetros fundamentales, en el marco clásico (no relativista), incluyéndose las ecuaciones de transporte correspondientes. En el capítulo de *fundamentos microscópicos*, se parte de la ecuación de Boltzmann para llegar a la ecuación de transporte de Enskog y se bosqueja la obtención de las ecuaciones constitutivas de Eckart y GSG. Posteriormente, se presenta el *análisis del sistema de Eckart* donde se revisan las inestabilidades genéricas del fluido relativista encontradas por Hiscock y Lindblom, considerando un sistema linealizado incluyendo campo gravitacional, flujo de calor y disipación. Posteriormente se aborda el *análisis del sistema utilizando la ecuación GSG (sustituyendo la ecuación constitutiva para el flujo de calor propuesta por Eckart)*, en el cual se analiza el sistema linealizado de ecuaciones de transporte en presencia de disipación dentro de la termodinámica irreversible lineal relativista (relatividad especial), estudiando la inestabilidad pero utilizando la ecuación constitutiva dependiente de los gradientes a primer orden y *no* de la aceleración hidrodinámica. En la última parte se muestran las *conclusiones y perspectivas* relacionadas con los resultados obtenidos.

La temática y el orden en que se presenta este trabajo pretenden resaltar la importancia de los resultados encontrados, los cuales introducen un sutil pero significativo cambio al formalismo de Eckart, generándose la posibilidad de su uso en otros problemas. Consideramos que en un futuro estas ideas podrán ser exportadas para abordar problemas relacionados con el confinamiento de plasmas, utilizándose técnicas propias de la teoría de gravitación.

# CAPÍTULO I

## Antecedentes

### I.1 LA INESTABILIDAD DE JEANS (no relativista)

#### INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta como antecedente el problema de la inestabilidad de Jeans, considerando primeramente su formalismo básico. Posteriormente se muestra con suficiente detalle el cálculo correspondiente en presencia de disipación.

James Jeans, fue uno de los pioneros británicos en el campo de la cosmología. Su reputación científica se basa en las monografías *The Dynamical Theory of Gases* (1904), *Theoretical Mechanics* (1906), y *Mathematical Theory of Electricity and Magnetism* (1908). Tras retirarse en 1929, escribió varios libros de divulgación científica: *The Stars in Their Courses* (1931), *The Universe Around Us, Through Space and Time* (1934), *The New Background of Science* (1933), y *The Mysterious Universe*. Estos libros le reportaron popularidad como divulgador de los descubrimientos científicos de su época, especialmente en los campos de la relatividad y la cosmología.

Uno de los descubrimientos más importantes de Jeans, *la longitud de Jeans*, está asociada con el radio crítico necesario para la formación de una estructura a partir de una nube interestelar en el espacio. Este parámetro depende de la masa, tamaño y densidad de la nube.

De acuerdo a ese formalismo, una nube con un volumen menor al determinado con la longitud de Jeans, no tendrá un campo gravitacional lo suficientemente intenso como para superar las fuerzas de gases exógenas, mientras que una nube mayor a dicho volumen tendrá la posibilidad de sufrir un colapso gravitacional. Otro parámetro importante es la llamada masa de Jeans, que proporciona la cantidad de materia crítica que una nube debe alcanzar antes de ser capaz de colapsarse.

J. Jeans, también ayudó a perfeccionar los trabajos de Rayleigh, que relacionan la densidad de energía de la radiación de un cuerpo negro con la temperatura de la fuente de

emisión. El resultado principal derivado de estos desarrollos se conoce actualmente como la ley de Rayleigh-Jeans [15].

### I.1.1 Formalismo básico (fenomenológico)

Como se observó en la introducción, la información astronómica indica que la estructura observada del universo actual es el resultado de la amplificación gravitacional de pequeñas perturbaciones en el fluido cósmico. Esta teoría de la inestabilidad gravitacional comienza con las teorías Newtonianas y sigue hasta las teorías relativistas, siendo la más simple la de la inestabilidad gravitacional denominada *inestabilidad de Jeans*, la cual considera un fluido perfecto en un universo estático. Los estudios desarrollados por Jeans alrededor de 1902 [1], consideraban un gas isotérmico de baja temperatura, y aunque en la actualidad los procesos de formación de estructuras se conocen con mucha mayor precisión [16], la teoría de Jeans constituye una buena aproximación, razón por la cual se describen a continuación sus elementos principales mismos que tomaremos como referencia para este trabajo.

Se sabe que en una nube de gas existe un equilibrio dinámico debido a la competencia entre la presión de gas y la fuerza gravitacional, pero si la nube supera cierta masa crítica entonces surge la posibilidad de un colapso. Este es el motivo por el cual las inestabilidades suelen producirse en las nubes más masivas dando lugar a formaciones estelares. La hipótesis inicial, consiste en suponer que existe un mecanismo que genera una serie de fluctuaciones en la densidad, las cuales pueden evolucionar hasta formar una estructura. Entonces, si se parte de los supuestos de que en una nube de gas el número de partículas por unidad de volumen permanece constante (salvo fluctuaciones) y que también se conserva el momento lineal, se pueden seguir distintos caminos para obtener las ecuaciones de transporte, ya sea fenomenológicamente o desde la teoría cinética via la ecuación de transporte de Enskog [17]. Desde el punto de vista fenomenológico se pueden utilizar como punto de inicio las ecuaciones de Euler clásicas (en las que no se consideran efectos disipativos), para describir la evolución de un fluido perfecto, tomando en cuenta un campo gravitacional débil. Estas ecuaciones son:

$$\frac{\partial}{\partial t} (n) + \nabla \cdot (n\vec{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u}) + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \frac{1}{mn}\nabla p + \nabla\varphi = 0, \quad (2)$$

$$\nabla^2\varphi = 4\pi Gmn, \quad (3)$$

donde  $n$  es el número de partículas por unidad de volumen,  $p$  es la presión,  $G$  es la constante gravitacional de Newton,  $\vec{u}$  es la velocidad local del fluido y  $\varphi$  es el potencial gravitacional, el cual satisface la ecuación de Poisson (3). En esta sección resulta útil definir  $\rho = mn$  para describir la densidad de masa de un fluido no relativista, donde  $m$  representa la masa de una sola partícula.

Si se considera que en un sistema que está en equilibrio existen pequeñas perturbaciones alrededor de él, las variables establecidas contendrán una parte en equilibrio denotada por un subíndice “0” más una pequeña perturbación, es decir,  $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ ,  $p = p_0 + \delta p$ ,  $\vec{u} = \vec{u}_0 + \delta\vec{u}$  y  $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$ . Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones anteriores, y eliminando los términos de segundo orden o mayores (debido a que sus valores son muy pequeños y se pueden despreciar), se obtiene un nuevo sistema de ecuaciones para las perturbaciones, como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho) + \rho_0\nabla \cdot (\delta\vec{u}) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\vec{u}) + \frac{C_T^2}{\rho_0}\nabla(\delta\rho) + \nabla\delta\varphi = 0, \quad (5)$$

$$\nabla^2\delta\varphi = 4\pi G\delta\rho. \quad (6)$$

Cabe mencionar que la ecuación (6) se obtiene suponiendo que  $\varphi_0$  es constante (Jeans swindle) [17], y  $C_T^2$  es la velocidad del sonido (isotérmica) en el medio, la cual está definida como:

$$C_T^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \frac{\delta p}{\delta \rho} \quad (7)$$

también se ha tomado  $\vec{u}_0 = 0$ , considerando que el fluido se encuentra en reposo o que el observador se mueve con la velocidad baricéntrica del mismo.

A partir del sistema de ecuaciones (4), (5) y (6), se puede deducir la siguiente ecuación diferencial de segundo orden, la cual como se observa tiene la estructura de una ecuación de onda en función de las fluctuaciones de densidad:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\delta\rho) - C_T^2 \nabla^2 (\delta\rho) = 4\pi G \rho_0 (\delta\rho) \quad (8)$$

donde  $C_T^2 = \frac{KT_0}{m}$ , con  $K$  representando a la constante de Boltzmann,  $T_0$  al valor de equilibrio de la temperatura y  $m$  a la masa de la partícula. Una ecuación de este tipo tiene una solución general para  $\delta\rho = \delta\rho(\vec{r}, t)$  dada por:

$$\delta\rho = A \exp \left[ i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t \right] \quad (9)$$

donde  $\vec{k}$  es el vector de propagación ( $k \equiv |\vec{k}|$ ) y  $\omega$  es la frecuencia angular. Es fácil mostrar que las variables en la ecuación (9) satisfacen la relación de dispersión:

$$\omega^2 = C_T^2 k^2 - 4\pi G \rho_0. \quad (10)$$

Notese que  $\omega$  puede tomar valores imaginarios o reales. Si se toma el primer caso, las fluctuaciones de densidad crecerán (o decrecerán) exponencialmente, mientras que si los valores son reales, las perturbaciones simplemente oscilarán como una onda sonora (no amortiguada). De manera que *si  $k$  es menor que un cierto valor crítico,  $\omega$  será imaginaria haciendo posible el colapso*. Al valor crítico para  $k$  donde  $\omega = 0$ , se le llama número de onda de Jeans y aquí se le denota por  $k_J$ . Por lo que al considerar  $\omega = 0$  en (10) se obtiene que:

$$k_J = \left( \frac{4\pi G \rho_0}{C_T^2} \right)^{1/2} \quad (11)$$

En este contexto es también útil definir la *masa de Jeans*, la cual se toma como la masa contenida dentro de una esfera de radio  $\frac{\lambda_J}{2}$ , donde  $\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J}$ , es la llamada longitud de Jeans, por lo que:

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{\pi}{k_J} \right)^3 \rho_0 = \frac{\pi^{5/2}}{6} \left( \frac{C_T^3}{G^{3/2} \rho_0^{1/2}} \right) \quad (12)$$

de manera que nubes de gas con una masa mayor a  $M_J$ , pueden presentar inestabilidades con la posibilidad de colapsarse.

Por otro lado una explicación física simple de por qué este factor de escala (la longitud de Jeans  $\lambda_J$ ) separa los modos de estabilidad e inestabilidad gravitacional, se da considerando la comparación entre la escala de tiempo para el colapso gravitacional representado por  $\tau_g \simeq (4\pi G\rho_0)^{-1/2}$  y el tiempo de respuesta de la presión dado por  $\tau_p \sim \lambda/C_T$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda o el tamaño de la perturbación. Así, si  $\tau_p > \tau_g$ , el colapso gravitacional de la perturbación puede ocurrir antes de que el gradiente de presión pueda responder para restaurar el equilibrio hidrodinámico, es decir, cuando  $\lambda \gtrsim C_T/(G\rho_0)^{1/2} \sim \lambda_J$ . Cabe mencionar que el análisis clásico de Jeans, no es aplicable directamente a la cosmología ya que no toma en cuenta la expansión del universo [17].

En este trabajo utilizaremos como parámetro de referencia el número de onda de Jeans dado por:

$$q_J^2 \equiv \frac{4\pi Gmn_0}{C_s^2} \quad (13)$$

(a partir de este punto se cambiará  $k_J$  por  $q_J$  ya que ahora se tiene  $C_s^2$  en vez de  $C_T^2$ ): donde  $C_s^2 = \frac{5KT_0}{3m}$  es la velocidad del sonido en el medio. La velocidad del sonido incluida en la ecuación (13), emerge del cálculo del número de onda de Jeans tomando en cuenta fluctuaciones de temperatura. Dicho cálculo, rara vez aparece en los textos tradicionales sobre el tema y se incluye en el apéndice de esta tesis.

## 1.2 FORMALISMO EN PRESENCIA DE DISIPACIÓN

Para ilustrar el comportamiento de fluidos bajo el efecto de un campo gravitacional débil, tomando en cuenta efectos disipativos (dentro del formalismo Navier-Stokes-Fourier), se consideraron dos trabajos [4, 6]. En este caso, las ecuaciones básicas de la hidrodinámica que describen la evolución de un fluido simple no relativista en el marco de la Termodinámica Irreversible Lineal (LIT), están dadas por la ecuación de conservación de la masa (ecuación de continuidad), la ecuación de conservación del momentum y la ecuación de balance de energía interna, a saber:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u}) + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla \cdot \overleftrightarrow{\Pi} + \nabla\varphi = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + p(\nabla \cdot \vec{u}) - \frac{\partial}{\partial t}(T) - \frac{2}{3}T(\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \cdot \vec{J}_{[Q]} - \overleftrightarrow{\Pi} : \nabla\vec{u} = 0, \quad (16)$$

donde las variables  $\rho, \vec{u}, T$  son funciones de  $(\vec{r}, t)$ ,  $p = p(n, T)$  y  $\varepsilon = \varepsilon(n, T)$  son ecuaciones de estado. Por otro lado se tiene que  $\theta = \nabla \cdot \vec{u}$  y  $\overleftrightarrow{\Pi}$  es el tensor de Navier (viscoso). Adicionalmente se introduce la ecuación de Poisson que contiene el campo gravitacional:

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho.$$

### I.2.1 Ecuaciones constitutivas

Para resolver este sistema es necesario introducir dos ecuaciones constitutivas: la ecuación de Navier para el tensor  $\overleftrightarrow{\Pi}$  y la de Fourier para el flujo de calor, respectivamente dadas por:

$$\overleftrightarrow{\Pi} = -2\eta\overleftrightarrow{\sigma} - \zeta\theta\mathbb{I}, \quad (17)$$

$$\vec{J}_{[Q]} = -\kappa\nabla T, \quad (18)$$

donde  $\eta$  y  $\zeta$  son las viscosidades cortante y volumétrica respectivamente,  $\overleftrightarrow{\sigma}$  es la parte simétrica sin traza del gradiente de velocidad,  $\kappa$  es la conductividad térmica e  $\mathbb{I}$  representa a la matriz identidad [18].

### I.2.2 Ecuaciones linealizadas

A continuación se sustituyen las ecuaciones (17,18) en el sistema (14 - 16) y se desprecian los términos no lineales, obteniéndose para las perturbaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho) + \rho_0(\delta\theta) = 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\delta u_k) + \frac{1}{\rho_0 k_T} \frac{\partial}{\partial x^k} (\delta \rho) + \frac{\beta}{k_T} \frac{\partial}{\partial x^k} (\delta T) - 2\eta \delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (\delta u_k) + \\ + \left( \frac{2}{3}\eta - \zeta \right) \frac{\partial}{\partial x^k} (\delta \theta) + \frac{\partial}{\partial x^k} (\delta \varphi) = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta T) - D_T \delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (\delta T) + \frac{\beta T_0}{\rho_0 C_p k_T} (\delta \theta) = 0, \quad (21)$$

donde  $\vec{u}_0 = 0$ ,  $\vec{u} = \delta \vec{u}$ ,  $\frac{\beta}{k_T} = \left( \frac{\delta p_0}{\delta T_0} \right)_{\rho_0}$ ,  $k_T = \rho_0 \left( \frac{\delta p_0}{\delta \rho_0} \right)_{T_0}$  y  $D_T = \frac{\kappa}{\rho_0 C_V}$  es la difusividad térmica,  $C_p$  y  $C_V$  son los calores específicos a presión y volumen constante, respectivamente. Calculando la divergencia del balance de ímpetu (ecuación 20) y reacomodando términos, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en términos de las fluctuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta \rho) + \rho_0 (\delta \theta) = 0,$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\delta \theta) + \frac{1}{\rho_0 k_T} \delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (\delta \rho) + \frac{\beta}{k_T} \delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (\delta T) - \left( \frac{4}{3}\eta + \zeta \right) \delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (\delta \theta) + \\ + \delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (\delta \varphi) = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta T) - D_T \delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (\delta T) + \frac{\beta T_0}{\rho_0 C_p k_T} (\delta \theta) = 0.$$

nótese que este sistema se puede reducir a solo dos ecuaciones si se simplifica utilizando la ecuación de continuidad (19) y  $D_v = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{4}{3}\eta + \zeta \right)$ . Además, considerando a la velocidad del sonido en el medio como  $C_0^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$ ,  $C_p - C_V = \frac{\beta^2 T_0}{\rho_0^2 k_T}$  y  $k_T = \gamma k_s = \frac{C_p}{C_V} k_s = \frac{\gamma}{C_0^2}$ , donde  $k_s = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$  es la compresibilidad adiabática, se llega a:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\delta \rho) + \frac{C_0^2}{\rho_0 \gamma} \delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (\delta \rho) + \frac{C_0^2 \beta}{\gamma} \delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (\delta T) + \\ D_v \delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\delta \rho) \right) + \delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (\delta \varphi) = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta T) - D_T \delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (\delta T) - \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma \beta} \right) \frac{\partial}{\partial t} (\delta \rho) = 0. \quad (24)$$

Estas ecuaciones forman un conjunto acoplado para las fluctuaciones de la densidad y la temperatura en el fluido, bajo la acción de una fuerza conservativa. Si bien este resultado no es nuevo, es interesante ver el efecto del potencial gravitacional en la función de correlación para las fluctuaciones termodinámicas. Si se consideran sólo las fluctuaciones en la densidad, el potencial gravitacional satisface la ecuación de Poisson:

$$\delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (\delta\varphi) = -4\pi G (\delta\rho) \quad (25)$$

y se puede reescribir la ecuación (23) como:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\delta\rho) + \frac{C_0^2}{\rho_0 \gamma} \delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (\delta\rho) + \frac{C_0^2 \beta}{\gamma} \delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (\delta T) + \\ D_v \delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\delta\rho) \right) - 4\pi G (\delta\rho) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Así que para resolver el sistema de ecuaciones (24) y (26) se sigue el procedimiento estandar, es decir, se reduce a un sistema algebraico por medio de la aplicación de las transformadas de Laplace (en el tiempo) y Fourier (en el espacio), escogiendo que las fluctuaciones iniciales de temperatura sean cero. Eliminando la temperatura se obtiene solamente una ecuación en términos de las fluctuaciones de la densidad de masa, que nos lleva a una ecuación algebraica en términos de  $s$ . Para este caso se obtiene una ecuación de dispersión de tercer grado en términos de dicha variable. Si se quiere recuperar el valor de  $\delta\rho$  se debe aplicar la transformada inversa de Laplace. Ahora bien, para resolver este polinomio cúbico, se puede suponer que el pico de Rayleigh no se modifica sustancialmente por un potencial externo [Cuando se hace cruzar un haz de luz a través de un gas en movimiento se genera un espectro de dispersión que consta de un pico central (llamado pico de Rayleigh) y dos pequeños picos uno a cada lado del central (llamados picos de Brillouin) cuya ubicación depende de la frecuencia de la luz y las condiciones dinámicas del fluido][19], de manera que de acuerdo a la teoría estandar una de las raíces de esta ecuación cúbica es  $s_0 = -D_T q^2$  donde  $D_T$  es la difusividad térmica, quedando:

$$(s_0 + D_T q^2) (s^2 + D_v q^2 s + C_0^2 q^2 - 4\pi G \rho_0) = 0 \quad (27)$$

entonces las otras dos raíces de la ecuación son:

$$s_{1,2} = -\frac{D_v q^2}{2} \pm i \left[ (C_0^2 q^2 - 4\pi G \rho_0) - \frac{D_v^2 q^4}{4} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (28)$$

Analizando este resultado nos damos cuenta que si  $4\pi G \rho_0 \rightarrow 0$ , es decir, si eliminamos los efectos gravitacionales y la viscosidad domina sobre el término en  $q^2$ , se llega a los resultados estandar para los picos de Brillouin [20] correspondientes a las fluctuaciones de densidad, dadas por: [21]

$$\delta\rho(\vec{q}, t) = \delta\rho(\vec{q}, 0) \frac{1}{\gamma} e^{-D_v q^2 t} \text{Cos}[C_0 q t] \quad (29)$$

que representa los modos acusticos amortiguados para el factor Stokes-Kirchhoff  $D_v$ .

Por otro lado, si  $4\pi G \rho_0 \neq 0$ , el valor umbral para  $q$  que separa entre las oscilaciones amortiguadas y los modos de crecimiento está dado por :

$$(C_0^2 q^2 - 4\pi G \rho_0) - \frac{D_v^2 q^4}{4} = 0 \quad (30)$$

o bien

$$q^2 = \frac{2C_0^2}{D_v^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\pi G \rho_0 D_v^2}{C_0^4}} \right) \quad (31)$$

La ecuación (31) es una generalización del número de onda de Jeans cuando los efectos disipativos debido a la viscosidad no se desprecian. Si se desarrolla en serie la raíz negativa suponiendo menor que uno el término  $\frac{4\pi G \rho_0 D_v^2}{C_0^4}$ , y se simplifica se obtiene:

$$q^2 = \frac{2C_0^2}{D_v^2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{4\pi G \rho_0 D_v^2}{C_0^4} \right) \right] \quad (32)$$

de donde se puede observar que al hacer tender a cero los efectos viscosos se recupera el valor clásico del número de onda de Jeans, es decir:

$$q^2 \approx \frac{4\pi G \rho_0}{C_0^2} = q_J^2 \quad (33)$$

# CAPÍTULO II

## Fundamentos microscópicos de la teoría de transporte no relativista

### INTRODUCCIÓN

En la sección anterior se abordó el problema de la inestabilidad de Jeans a partir de la termodinámica irreversible lineal (TIL). Sin embargo dicha fenomenología puede ser fundamentada desde una teoría microscópica. Más aún, con la teoría cinética es posible obtener adicionalmente a las ecuaciones de transporte, las relaciones constitutivas que expresan los flujos disipativos en términos de las fuerzas termodinámicas [22]. En este capítulo se hace una introducción a la metodología estandar utilizada para obtener las ecuaciones hidrodinámicas del sistema, tanto en el caso no relativista como en el relativista. El punto de partida es la ecuación de Boltzmann [23], y a partir de ésta, se obtiene la ecuación de transporte de Enskog haciendo uso del concepto de promedio estadístico y la función de distribución de Boltzmann en equilibrio  $f^{(0)}$ . A continuación se sustituyen en dicha ecuación los invariantes colisionales  $\Psi = 1$ ,  $\Psi = m\vec{v}$  y  $\Psi = \frac{1}{2}mv^2$  para obtener las llamadas ecuaciones de transporte y junto con las ecuaciones constitutivas se conforma el conjunto de ecuaciones que describe la dinámica del sistema. El desarrollo se realizó analizando el comportamiento de las fluctuaciones de la densidad de un fluido en presencia de un campo gravitacional newtoniano sin considerar efectos de disipación.

### II.1 ECUACIÓN DE BOLTZMANN

Una forma de abordar los fenómenos de transporte en un gas diluido bajo la acción de campos internos, campos externos o gradientes de temperatura, es por medio del estudio de las variaciones de su función de distribución (la cual nos determina la probabilidad de encontrar una partícula en el espacio moviéndose con una velocidad entre  $\vec{v}$  y  $\vec{v} + d\vec{v}$ ) debido a las perturbaciones producidas por dichos campos. Dependiendo del tipo de partículas que

componen el gas, o de las condiciones en las que se encuentra éste (así por ejemplo si estamos pensando en un gas simple, no degenerado, relativista o no, con disipación o no, y sujeto a un campo externo (en nuestro caso gravitacional)), es el tipo de función de distribución que se utiliza, la cual como es de esperarse debe ser dependiente de la posición, la velocidad y del tiempo es decir,

$$f = f(\vec{r}, \vec{v}, t). \quad (34)$$

La función de distribución para un gas ideal en equilibrio *local* denominada función de distribución de Maxwell-Boltzmann, que se utiliza para obtener la probabilidad de encontrar una partícula en una cierta región del espacio fase puede expresarse como:

$$f^{eq}(\vec{v})d\vec{r}d\vec{v} = n \left( \frac{m}{2\pi KT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\left(\frac{m(\vec{v}-\vec{u})^2}{2KT}\right)} d\vec{r}d\vec{v}, \quad (35)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula en reposo  $n$  es el número de partículas por unidad de volumen,  $K$  es la constante de Boltzman,  $T$  es la temperatura,  $\vec{u}$  es la velocidad hidrodinámica y  $\vec{v}$  es la velocidad de la partícula. Cabe mencionar que la dependencia con  $\vec{r}$  y  $t$  de la función de distribución es a través de las variables de estado  $n = n(\vec{r}, t)$ ,  $T = T(\vec{r}, t)$  y  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ .

Si se calcula la derivada total respecto del tiempo de una distribución del tipo dado por la ecuación (34), para determinar la razón de cambio del número de partículas en un tiempo determinado, se obtiene:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (36)$$

que en forma vectorial se puede representar como:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \dot{\vec{v}} \cdot \nabla_{\vec{v}} f, \quad (37)$$

en donde la aceleración  $\dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  contiene los efectos de las diferentes fuerzas consideradas que están actuando sobre las partículas del sistema. Algunas posibles alternativas al respecto pueden ser consultadas por el lector en la referencia [22]. En este trabajo el término  $\dot{\vec{v}} = \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$  incluye solamente la fuerza  $\vec{F}$  debida al campo gravitacional Newtoniano, entonces

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_{\vec{v}} f. \quad (38)$$

Por otro lado, se tiene que las partículas están en continua interacción. De manera que la ecuación (38) se puede igualar a un kernel o núcleo de interacción (colisional) denominado  $\vec{C}(ff')$ , dicho kernel se puede pensar como *un operador no lineal, integral e independiente del tiempo* el cual hace que  $f$  cambie en el tiempo debido precisamente a esas interacciones. Entonces  $\vec{C}(ff')$ , contendrá todas las colisiones binarias en el sistema donde dos moléculas con velocidades iniciales  $\vec{v}_0$  y  $\vec{v}_1$  respectivamente, pasan a otro estado con velocidades finales  $\vec{v}'_0$  y  $\vec{v}'_1$  y viceversa, considerando un equilibrio termodinámico local. Haciendo lo anterior la ec. (38) se puede escribir finalmente como:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_{\vec{v}} f = \vec{C}(ff'). \quad (39)$$

A esta ecuación (39) se le conoce como la ecuación de Boltzmann [22], y es satisfecha por la función de distribución de Maxwell-Boltzmann cuando se alcanza el estado de equilibrio. El lector interesado en la forma específica del kernel colisional, puede consultar la referencia [19].

## II.2 ECUACIONES DE TRANSPORTE DE ENSKOG

Para obtener la ecuación de transporte de una magnitud  $\Psi(\vec{v})$ , se puede partir de la ecuación de Boltzmann obtenida anteriormente,

$$\frac{df}{dt} = C(ff').$$

Ahora bien, el promedio de una variable como  $\Psi(\vec{v})$ , se define como:

$$\langle \Psi \rangle = \frac{1}{n} \int f \Psi d\vec{v}, \quad (40)$$

de donde

$$n \langle \Psi \rangle = \int f \Psi d\vec{v},$$

entonces, multiplicando cada término de la ecuación de Boltzmann por  $\Psi(\vec{v})$  e integrando con respecto a la velocidad  $\vec{v}$ , se obtiene:

$$\int \frac{df}{dt} \Psi(\vec{v}) d\vec{v} = \int \frac{\partial f}{\partial t} \Psi(\vec{v}) d\vec{v} + \int \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \Psi(\vec{v}) d\vec{v} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \int \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \Psi(\vec{v}) d\vec{v} = \int \vec{C}(ff') \Psi(\vec{v}) d\vec{v}. \quad (41)$$

Como ya se dijo anteriormente al multiplicar  $\vec{C}$  por  $\Psi(\vec{v})$  (que en nuestro caso es una invariante colisional, es decir, una magnitud que no cambia antes y después de una colisión), el producto da cero [19], por lo que el término al final de la ecuación (41) se cancela. Además, si aplicamos las propiedades básicas de los operadores diferenciales sobre integrales finitas, se puede reescribir como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f \Psi(\vec{v}) d\vec{v} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \int f \vec{v} \Psi(\vec{v}) d\vec{v} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \int \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \Psi(\vec{v}) d\vec{v} = 0 \quad (42)$$

integrando por partes el tercer término:  $\int \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \Psi(\vec{v}) d\vec{v}$  considerando  $u = \Psi(\vec{v})$  y  $dw = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d\vec{v}$ , se tiene que  $du = \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} d\vec{v}$  y  $w = f$ , quedando:

$$\int \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \Psi(\vec{v}) d\vec{v} = f \Psi(\vec{v}) \Big|_{\text{todo-el-espacio}} - \int f \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} d\vec{v} \quad (43)$$

por lo que la ecuación (42) se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f \Psi(\vec{v}) d\vec{v} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \int f \vec{v} \Psi(\vec{v}) d\vec{v} - \frac{\vec{F}}{m} \cdot \int f \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} d\vec{v} = 0 \quad (44)$$

a la cual se le llama, ecuación de transporte de Enskog (en honor a David Enskog (1884 – 1947) que realizó aportaciones fundamentales a la teoría cinética de los gases), Dicha ecuación también se puede expresar en términos de promedios utilizando para ello la definición dada por la ecuación (40), obteniéndose:

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle \Psi \rangle) + \nabla \cdot n \langle \vec{v} \Psi \rangle - \frac{n \vec{F}}{m} \cdot \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} \right\rangle = 0 \quad (45)$$

## II.2.1 Ecuaciones de conservación

Al sustituir los invariantes colisionales  $\Psi = 1$ ,  $\Psi = m\vec{v}$  y  $\Psi = \frac{1}{2}mv^2$ , en (45) se obtienen las ecuaciones: de continuidad, de conservación de momento y la ecuación de balance de energía interna respectivamente. Es decir, para  $\Psi = 1$  se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (n) + \nabla \cdot [n \langle \vec{v} \rangle] - \frac{n\vec{F}}{m} \cdot \left\langle \frac{\partial(1)}{\partial \vec{v}} \right\rangle = 0$$

que al simplificar se obtiene a la llamada ecuación de continuidad, representada como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (n) + \nabla \cdot (n\vec{u}) = 0 \quad (46)$$

donde se consideró que  $\langle \vec{v} \rangle = \vec{u}$ .

Para  $\Psi = m\vec{v}$  se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} [n \langle m\vec{v} \rangle] + \nabla \cdot [n \langle \vec{v}m\vec{v} \rangle] - \frac{n\vec{F}}{m} \cdot \left\langle \frac{\partial(m\vec{v})}{\partial \vec{v}} \right\rangle = 0$$

la cual, después de hacer los cálculos y simplificaciones correspondientes se transforma en la ecuación de balance de momento (o ímpetu), escrita como:

$$m \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + m\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{m}{\rho} \nabla p - \vec{F} = 0 \quad (47)$$

para llegar a esta ecuación se consideró el concepto de velocidad caótica no relativista representada por  $\vec{c}$ , que se relaciona con las velocidad hidrodinámica y la velocidad de la partícula (medida desde el laboratorio) a través de la relación:  $\vec{v} = \vec{u} + \vec{c}$ . Además, se definió a  $\overleftrightarrow{\Pi} = \rho \langle \vec{c}\vec{c} \rangle$  como el tensor de Navier, el cual al desarrollarlo solo con  $f^{(0)}$  (la función de distribución de probabilidades de Maxwell-Boltzmann en equilibrio) se obtuvo que:  $\overleftrightarrow{\Pi} = \rho \langle \vec{c}\vec{c} \rangle = nKT\mathbb{I}$ , siendo  $\mathbb{I}$  la matriz identidad. Se puede mostrar que en este caso al aplicarle la divergencia a  $\overleftrightarrow{\Pi}$ , se obtiene  $\nabla \cdot \overleftrightarrow{\Pi} = \nabla \cdot [nKT\mathbb{I}] = \nabla p$ .

Notese que el primer término es una masa por una aceleración (una fuerza), o bien si se considera a la masa de una partícula, (dado que se está considerando constante) dentro de la derivada parcial quedaría un cambio en el momento con respecto al tiempo (una fuerza). El segundo término se puede interpretar como un flujo de ímpetu producto del arrastre del fluido y el tercer término como la fuerza interna producto de un gradiente de presiones.

Por último al sustituirse  $\Psi = \frac{1}{2}mv^2$  en la ecuación (45) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ n \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle \right] + \nabla \cdot \left[ n \left\langle \vec{v} \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle \right] - \frac{n\vec{F}}{m} \cdot \left\langle \frac{\partial (\frac{1}{2}mv^2)}{\partial \vec{v}} \right\rangle = 0$$

la cual se puede reescribir después de realizar algunas manipulaciones algebraicas, como:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{2} u^2 \right) \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon) \right] + \nabla \cdot \frac{\rho}{2} \vec{u} u^2 + \nabla \cdot (\vec{u} \cdot \overleftarrow{\Pi}) + \theta \varepsilon + \frac{m}{2} \nabla \cdot n \langle \vec{c} \vec{c}^2 \rangle = n \vec{F} \cdot \vec{u} \quad (48)$$

en este caso se definió a la energía interna como  $\varepsilon(\vec{r}, t) = \langle n \frac{1}{2} m c^2 \rangle = \langle \frac{\rho}{2} c^2 \rangle$  y a  $\nabla \cdot \vec{u} = \theta$ .

Notese que si nos colocamos en el centro de masa del sistema, es decir, en el sistema comovil donde  $\vec{u} = 0$ , desaparecen cuatro términos quedando solamente dos de ellos, obteniéndose:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon) \right] + \frac{m}{2} \nabla \cdot [n \langle \vec{c} \vec{c}^2 \rangle] = 0 \quad (49)$$

luego entonces, situados en ese sistema comovil se puede definir un flujo (de calor) que fluye hacia el sistema o desde el sistema, como:

$$\frac{mn}{2} \langle \vec{c} \vec{c}^2 \rangle = \frac{\rho}{2} \langle \vec{c} \vec{c}^2 \rangle = \vec{J}_{[Q]} \quad (50)$$

de manera que (48) se puede escribir como:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \right] + \nabla \cdot \vec{J}_{[Q]} = 0.$$

Así, la ecuación de balance de energía puede escribirse finalmente como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{2} u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon) + \nabla \cdot \left( \frac{\rho}{2} \vec{u} u^2 \right) + \nabla \cdot (\vec{u} \cdot \overleftarrow{\Pi}) + \nabla \cdot (\vec{u} \varepsilon) + \\ \nabla \cdot (\vec{J}_{[Q]}) - \left( \frac{\rho \vec{F}}{m} \right) \cdot \vec{u} = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

Estas tres ecuaciones (46), (47) y (51), forman un conjunto incompleto, pues se introdujeron nuevas variables al sistema de ecuaciones de transporte: las seis componentes del tensor de Navier y las tres del flujo de calor. Entonces para resolver el sistema, es necesario más ecuaciones. A estas ecuaciones que completan el sistema se les llama *ecuaciones constitutivas*, las cuales permiten determinar las cantidades como funciones de las variables independientes  $\vec{r}$  y  $t$ .

## II.2.2 Ecuaciones constitutivas

Para obtener las ecuaciones constitutivas mencionadas en la sección anterior, se recurre al conocimiento de resultados experimentales, o bien a los obtenidos a partir de alguna teoría microscópica. Para este caso, la teoría cinética permite establecer la ecuación de Fourier para el flujo de calor y la ecuación de Navier para las componentes del tensor correspondiente [18–20]. Estas ecuaciones están dadas por:

$$\vec{J}_{[Q]} = -\kappa \nabla T \quad (52)$$

$$\overleftrightarrow{\Pi} = -\eta \left[ \overset{\circ}{\nabla} \vec{u} \right] - \zeta [\nabla \cdot (\vec{u})] \quad (53)$$

donde  $\kappa$  es la conductividad térmica y  $\eta, \zeta$  son las viscosidades cortante y volumétrica respectivamente y el primer paréntesis cuadrado nos indica la parte simétrica sin traza del gradiente de la velocidad hidrodinámica. Es muy importante resaltar que para un fluido simple no relativista, la ecuación (52) únicamente contendrá como fuerza termodinámica, al gradiente de temperatura. La extensión de este resultado al caso relativista no es trivial y ha sido sujeto a debate durante las últimas décadas. En este trabajo se analizan las implicaciones de posibles extensiones de dicha ecuación en el contexto del problema de la inestabilidad de Jeans cuando los efectos de la relatividad especial comienzan a ser relevantes.

# CAPÍTULO III

## Elementos de teoría cinética relativista

### INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta sección es establecer la contraparte relativista (relatividad especial) de la ecuación de transporte (44) y a continuación determinar el tensor de energía-esfuerzos, elemento fundamental para obtener las ecuaciones de transporte del sistema en cuestión. Para ello es necesario utilizar la ecuación de Boltzmann de forma covariante y establecer las definiciones apropiadas de los promedios estadísticos, en términos de integrales, correspondientes a cada observable.

Se sabe que determinar el comportamiento de un gas a través del análisis individual de cada partícula que lo conforma, es una empresa imposible, por lo que generalmente se recurre a una función de distribución de las partículas, que se denota por  $f = f(x^\mu, v^\mu, t)$ . Esta función se puede utilizar para conocer la evolución del gas a través del tiempo, analizando por ejemplo, el comportamiento de las fluctuaciones de densidad alrededor del equilibrio obteniéndose un sistema de ecuaciones para describir la evolución de sus promedios estadísticos (ecuaciones de transporte).

### III.1 ECUACIÓN DE BOLTZMANN EN NOTACIÓN TENSORIAL

A fin de establecer dichas ecuaciones para el caso relativista (relatividad especial en ausencia de fuerzas externas), se parte de la ecuación de Boltzmann en forma covariante, la cual esta dada por:

$$\frac{df}{dt} = v^\mu f_{,\mu} = C(ff') \quad (54)$$

en donde la coma antes de la  $\mu$ , significa la derivada parcial respecto de  $x^\mu$  y se está suponiendo la convención de suma de Einstein para índices repetidos.  $v^\mu = \gamma_w(w^i, c)$  es la cuadrivelocidad molecular y  $\vec{w} = w^i = (w^1, w^2, w^3)$  son las componentes espaciales de la trivelocidad de cada partícula,  $c$  la velocidad de la luz,  $\gamma_w \equiv \left(1 - \frac{w^i w_i}{c^2}\right)^{-1/2}$ , es el factor de Lorentz,  $C(ff')$  es el denominado Kernel o núcleo colisional dado por:

$$C(ff') = \int \int \{f'f'_1 - ff_1\} F \sigma d\Omega dv_1^* \quad (55)$$

donde  $F$  representa el flujo invariante de partículas que juega el papel de velocidad relativa, dado por:

$$F = \frac{1}{c^2} v^4 v_1^4 = \frac{1}{c} \sqrt{(v^\alpha v_{1\alpha})^2 - c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{\gamma_w \gamma_{w_1} (\vec{w} \cdot \vec{w}_1 - c^2)^2 - c^4}$$

$\sigma$  es la sección transversal de colisión,  $dv_1^* = \frac{cd^3v_1}{v_1^4} = \gamma^5 dw^i$  es el invariante diferencial de volumen en el espacio fase y la función de distribución en equilibrio local (llamada distribución de Jüttner) [23] es:

$$f^{(0)} = \frac{n}{4\pi c^3 z K_2\left(\frac{1}{z}\right)} \exp\left(\frac{\mathcal{U}^\beta v_\beta}{zc^2}\right) \quad (56)$$

en la cual  $\mathcal{U}^\beta = \gamma_u (u^j, c)$  representa la cuadrivelocidad hidrodinámica,  $\mathcal{U}^\beta = \langle v^\beta \rangle$ ,  $z = \frac{KT}{mc^2}$  es el parámetro relativista y  $K_2$  es la función de Bessel modificada de segundo orden y de segunda especie. En adelante un subíndice o superíndice designado por una letra latina indicará valores del 1 al 3, mientras que un subíndice o superíndice designado por una letra griega indicará valores del 1 al 4.

Esta función de distribución  $f = f(x^\mu, v^\mu, t)$  tiene la misma interpretación, es decir, es una función tal que el número de moléculas contenidas en un volumen del espacio fase, correspondiente a una posición  $\vec{r}$  y una cuadrivelocidad molecular  $v_\beta$  está dada por  $f(x^\mu, v^\mu, t) d^3x d^3v$ . En este caso estamos considerando un gas diluido, neutro y no degenerado, el cual está descrito en un espacio-tiempo que obedece la métrica de Minkowsky dada por  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - (cdt)^2$ . Estos elementos y el concepto de promedio estadístico, son la herramienta básica que se requiere de la teoría cinética y de la estadística matemática para determinar las ecuaciones de transporte relativistas.

### III.2 ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE ENSKOG

Como se hizo anteriormente se toma la ecuación de Boltzmann y se multiplica por los invariantes  $\Psi = 1$  y  $\Psi = mv^\mu$ , obteniéndose las ecuaciones de conservación de partículas así como la ecuación de balance de energía-momento, (donde si  $\mu = 1, 2, 3$  se tiene la ecuación

de balance de momento y si  $\mu = 4$ , se tiene el balance de energía). De manera que al efectuar la integral  $\int \Psi C (ff') dv^* = 0$ , se obtiene la llamada ecuación de transporte relativista de Enskog (equivalente a la obtenida en la ecuación (44) para el caso no relativista), dada por:

$$\left[ \int v^\mu \Psi f dv^* \right]_{;\mu} = 0 \quad (57)$$

es muy importante hacer notar que la derivada incluida en ecuación (57) preserva la tensorialidad de la ecuación de balance y corresponde a la derivada covariante, la cual para un vector  $A^\mu$  está dada por:

$$A^\mu_{;\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda \quad (58)$$

donde el segundo término del lado derecho contiene el símbolo de Christoffel de segunda especie, los cuales están determinados en términos de los coeficientes métricos como:

$$\Gamma^i_{jk} = g^{ir} \Gamma_{jkr} \quad \text{con} \quad \Gamma_{jkr} = \frac{1}{2} (-g_{jk,r} + g_{kr,j} + g_{rj,k})$$

[24]. Dicho término lleva implícitamente los efectos gravitacionales (curvatura).

Antes de continuar, conviene introducir el concepto de “velocidad caótica” en relatividad, para lo cual se consideran dos sistemas de referencia. El primero ( $S$ ) que representa el sistema del laboratorio y el segundo ( $\bar{S}$ ) el cual está fijo, montado en el centro de masa del diferencial de volumen que se mueve con velocidad  $\mathcal{U}^\beta$  (velocidad hidrodinámica), medida respecto de ( $S$ ), donde para simplificar se puede suponer que  $\mathcal{U}^\beta = \gamma_u (u^1, u^2, u^3, c)$ , donde  $\gamma_u \equiv \left(1 - \frac{u^i u_i}{c^2}\right)^{-1/2}$ . Ahora bien, cualquier velocidad  $v^\mu$  medida desde ( $S$ ) de una partícula de masa  $m$  contenida dentro de ese diferencial de volumen se le puede relacionar con la llamada velocidad caótica de la misma partícula  $\mathcal{K}^\nu = \gamma_k (k^i, c)$ , medida desde el marco de referencia ( $\bar{S}$ ) (donde  $u^i = 0$ ), *utilizando la transformación de Lorentz*  $\mathcal{L}^\mu_\nu$ , entre dos sistemas cuya velocidad relativa es la velocidad hidrodinámica  $\mathcal{U}^\beta$ , (donde el elemento de volumen se está moviendo en una dirección arbitraria) dada por:

$$\mathcal{L}^\mu_\nu = \begin{bmatrix} 1 + \frac{(\gamma_u - 1)u^1 u^1}{|u|^2} & \frac{(\gamma_u - 1)u^1 u^2}{|u|^2} & \frac{(\gamma_u - 1)u^1 u^3}{|u|^2} & -\gamma_u \frac{u^1}{c} \\ \frac{(\gamma_u - 1)u^2 u^1}{|u|^2} & 1 + \frac{(\gamma_u - 1)u^2 u^2}{|u|^2} & \frac{(\gamma_u - 1)u^2 u^3}{|u|^2} & -\gamma_u \frac{u^2}{c} \\ \frac{(\gamma_u - 1)u^3 u^1}{|u|^2} & \frac{(\gamma_u - 1)u^3 u^2}{|u|^2} & 1 + \frac{(\gamma_u - 1)u^3 u^3}{|u|^2} & -\gamma_u \frac{u^3}{c} \\ -\gamma_u \frac{u^1}{c} & -\gamma_u \frac{u^2}{c} & -\gamma_u \frac{u^3}{c} & \gamma_u \end{bmatrix} \quad (59)$$

a través de la expresión:

$$v^\mu = \mathcal{L}_\nu^\mu \mathcal{K}^\nu. \quad (60)$$

Si se sustituye  $\Psi = 1$  en (57) y se define el cuadri-flujo de partículas como:  $N^\mu = \int v^\mu f dv^*$ , se obtiene la ecuación de conservación de partículas, o ecuación de continuidad, dada por:

$$N^\mu_{;\nu} = (nu^\mu)_{;\nu} = 0 \quad (61)$$

que al desarrollarse y después de simplificar en términos de  $n$  y  $\theta$  (definida como  $\theta \equiv u^\mu_{;\mu}$ ), queda:

$$\dot{n} + n\theta = 0 \quad (62)$$

De la misma manera si se sustituye  $\Psi = mv^\mu$  en la ecuación de transporte de Enskog, y definiendo *el tensor de energía-esfuerzos* como:

$$T^{\mu\nu} = m \int v^\mu v^\nu f dv^* \quad (63)$$

entonces, la ecuación de conservación del cuadriflujo de momento-energía ( $p^1, p^2, p^3, E/c$ ), queda como:

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (64)$$

entonces el tensor de la ecuación (63) puede ser escrito utilizando la descomposición irreducible del tensor de segundo rango relativa a las direcciones paralela y perpendicular de la cuadrivelocidad hidrodinámica, como fue propuesto por Eckart [7], esto es:

$$T^{\mu\nu} = \tau \mathcal{U}^\mu \mathcal{U}^\nu + \tau^\mu \mathcal{U}^\nu + \tau^\nu \mathcal{U}^\mu + \tau^{\mu\nu} \quad (65)$$

donde  $\tau^\mu \mathcal{U}_\mu = 0$  y  $\tau^{\mu\nu} \mathcal{U}_\nu = 0$ . Los términos en  $\tau$  corresponden a un escalar, un tensor de primer rango y un tensor de segundo rango dados respectivamente como:

$$\tau = T^{\mu\nu} \frac{\mathcal{U}_\mu \mathcal{U}_\nu}{c^4} \quad (66)$$

$$\tau^\mu = -\frac{1}{c^2} h_\alpha^\mu T^{\alpha\beta} \mathcal{U}_\beta \quad (67)$$

$$\tau^{\mu\nu} = h_\alpha^\mu h_\beta^\nu T^{\alpha\beta} \quad (68)$$

en este caso  $h_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \frac{\mathcal{U}^\mu \mathcal{U}_\nu}{c^2}$  es el proyector espacial, el cual elimina la componente cuarta (en nuestro caso la componente temporal), es decir, satisface  $\mathcal{U}_\mu h_\nu^\mu = 0$ . Conviene señalar que en el desarrollo fenomenológico estas tres expresiones se identifican con la energía interna, el flujo de calor y el tensor de esfuerzos. Este se había utilizado sin una justificación microscópica. Sin embargo, en términos de la teoría cinética, es posible efectuar el cálculo directo de estas cantidades, las cuales se pueden interpretar como promedios estadísticos sobre la velocidad caótica. Así tenemos que el escalar  $\tau$  adquiere la forma:

$$\tau = m \frac{\mathcal{U}_\mu \mathcal{U}_\nu}{c^4} \int v^\mu v^\nu f dv^* = m \int \gamma_k^2 f d\mathcal{K}^* \quad (69)$$

(note que se cambió  $dv^*$  por  $d\mathcal{K}^*$  debido a que estamos situados en el sistema comóvil) el cual se puede interpretar como la energía interna por partícula, ya que si se sustituye en la ecuación (57)  $\Psi = mv^{(4)}$  queda separada como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( m \int v^{(4)} v^{(4)} f dv^* \right) + \frac{\partial}{\partial x^l} \left( m \int v^{(4)} v^l f dv^* \right) = 0 \quad (70)$$

donde se puede apreciar claramente que el primer término corresponde a la energía total, mientras que, el segundo se refiere al flujo de energía. De manera que el equivalente al momento de energía total calculado en un sistema en reposo se obtiene de la energía interna solamente, esto es:

$$n\varepsilon = mc^2 \int \gamma_k^2 f d\mathcal{K}^* \quad (71)$$

y así,

$$\tau = \frac{n\varepsilon}{c^2} = nm \left( 3z + \frac{K_3 \left( \frac{1}{z} \right)}{K_2 \left( \frac{1}{z} \right)} \right). \quad (72)$$

Ahora bien, para la cantidad vectorial  $\tau^\mu$  se tiene que

$$\tau^\mu = -\frac{h_\alpha^\mu \mathcal{U}_\beta}{c^2} \int v^\alpha v^\beta f dv^* \quad (73)$$

en donde si se utiliza el hecho de que  $\mathcal{U}_\beta v^\beta = -c^2 \gamma_k$ , entonces (73) se puede expresar como una integral en términos de la velocidad caótica como sigue:

$$\tau^\mu = h_\alpha^\mu \mathcal{L}_\beta^\alpha \int \gamma_k \mathcal{K}^\beta f d\mathcal{K}^* \quad (74)$$

o bien.

$$\tau^\mu = \mathcal{R}_\beta^\mu \int \gamma_k \mathcal{K}^\beta f d\mathcal{K}^* \quad (75)$$

donde se utilizó que  $\mathcal{R}_\beta^\mu = h_\alpha^\mu \mathcal{L}_\beta^\alpha$ ,  $\mathcal{R}_4^\mu = 0$  y para  $a = 1, 2, 3$  se tiene  $\mathcal{R}_a^\mu = \mathcal{L}_a^\mu$ .

### III.2.1 Ecuaciones constitutivas

A continuación se introduce el desarrollo de Chapman-Enskog para  $f$  (sólo hasta el primer orden) [22] donde  $\epsilon$  es el llamado parámetro de Knudsen, el cual está dado por el cociente entre el camino libre medio  $\lambda$  y  $L$  la longitud característica del espacio que contiene al gas:

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots \quad (76)$$

(75) se puede reescribir como:

$$\tau^\mu = \mathcal{R}_\beta^\mu \int \gamma_k \mathcal{K}^\beta f^{(0)} d\mathcal{K}^* + \mathcal{R}_\beta^\mu \int \gamma_k \mathcal{K}^\beta f^{(1)} d\mathcal{K}^* \quad (77)$$

observe que el primer término después de la igualdad desaparece (no existe flujo de calor) ya que cuando  $\beta = 1, 2, 3$  la integral es impar en  $\mathcal{K}$ , y el término de  $\beta = 4$  en la suma es cero, puesto que  $\mathcal{R}_4^\mu = 0$  para cualquier  $\mu$ . Entonces sólo la integral que contiene a  $f^{(1)}$  es diferente de cero y se puede escribir como:

$$\tau^\mu = \mathcal{R}_\beta^\mu \int \gamma_k \mathcal{K}^\beta f^{(1)} d\mathcal{K}^*. \quad (78)$$

A fin de introducir la transformación de Lorentz, se puede observar que si se toma  $\beta = 4$  en la ecuación anterior se obtiene:

$$\tau^\mu = \int \gamma_k \mathcal{K}^4 f^{(1)} d\mathcal{K}^* = 0 \quad (79)$$

de manera que si se usa la ecuación (79) se puede reescribir (78) utilizando la transformación de Lorentz, obteniéndose:

$$\tau^\mu = \mathcal{L}^\mu_\beta \int \gamma_k \mathcal{K}^\beta f^{(1)} d\mathcal{K}^* \quad (80)$$

Así entonces, por inspección de la ecuación (70);  $\frac{\partial}{\partial t} (m \int v^{(4)} v^{(4)} f dv^*) + \frac{\partial}{\partial x^l} (m \int v^{(4)} v^l f dv^*) = 0$  se puede concluir que  $\tau^\mu = \int \gamma_k \mathcal{K}^l f^{(1)} d\mathcal{K}^*$  representa el flujo de calor en el sistema de referencia en reposo, donde  $v^\alpha = \mathcal{K}^\alpha$  y entonces se obtiene:

$$q_{[0]}^\beta = c^2 \int \gamma_k \mathcal{K}^\beta f^{(1)} d\mathcal{K}^* \quad (81)$$

Esta ecuación anterior, es análoga a la encontrada en el caso no relativista y posee contenido físico. Sabemos que el flujo de calor lo podemos considerar como el flujo promedio de la energía caótica, de manera que la ecuación (81) es consistente con esta idea. Ahora bien en un marco de referencia arbitrario la expresión:

$$\tau^\mu = \frac{1}{c^2} \mathcal{L}^\mu_\beta q_{[0]}^\beta = \mathcal{L}^\mu_\beta \int \gamma_k \mathcal{K}^\beta f^{(1)} d\mathcal{K}^* \quad (82)$$

representa el promedio del flujo de energía cinética de las moléculas.

Finalmente para el tensor de segundo rango  $\tau^{\mu\nu}$  dado en la ecuación (68)  $\tau^{\mu\nu} = h_\alpha^\mu h_\beta^\nu T^{\alpha\beta}$

$$\tau^{\mu\nu} = m h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \mathcal{L}^\alpha_\eta \mathcal{L}^\beta_\delta \int f \mathcal{K}^\eta \mathcal{K}^\delta d\mathcal{K}^* \quad (83)$$

o bien

$$\tau^{\mu\nu} = m \mathcal{R}_\eta^\mu \mathcal{R}_\delta^\nu \int \mathcal{K}^\eta \mathcal{K}^\delta (f^{(0)} + f^{(1)}) d\mathcal{K}^* \quad (84)$$

y considerando el caso de equilibrio local se tiene

$$m \mathcal{R}_\eta^\mu \mathcal{R}_\delta^\nu \int \mathcal{K}^\eta \mathcal{K}^\delta f^{(0)} d\mathcal{K}^* = m \mathcal{R}_i^\mu \mathcal{R}_j^\nu \int \mathcal{K}^i \mathcal{K}^j f^{(0)} d\mathcal{K}^* \quad (85)$$

en donde únicamente el caso cuando  $i = j$  genera componentes distintas de cero, de manera que

$$m\mathcal{R}_\eta^\mu\mathcal{R}_\delta^\nu\int\mathcal{K}^\eta\mathcal{K}^\delta f^{(0)}d\mathcal{K}^* = ph^{\mu\nu} \quad (86)$$

donde se introduce el resultado bien conocido para la presión hidrostática , es decir:

$$p = m\int(\mathcal{K}^1)^2 f^{(0)}d\mathcal{K}^* = m\int(\mathcal{K}^2)^2 f^{(0)}d\mathcal{K}^* = m\int(\mathcal{K}^3)^2 f^{(0)}d\mathcal{K}^* \quad (87)$$

y

$$p = nKT \quad (88)$$

donde  $K$  es la constante de Boltzmann,  $T$  es la temperatura y  $n$  es la densidad de partículas. Además,

$$\mathcal{R}_i^\mu\mathcal{R}_j^\nu\delta^{ij} = \mathcal{L}_i^\mu\mathcal{L}_j^\nu\delta^{ij} = h^{\mu\nu} \quad (89)$$

de manera que la ecuación (86) se obtuvo de una forma similar (usando transformaciones de Lorentz) a la obtenida por Weinberg [? ], aunque él no consideró el caso disipativo.

Para el término disipativo en la ecuación (84), el cual lo denotaremos como el tensor  $\Pi^{\mu\nu}$  se tiene que:

$$\Pi^{\mu\nu} = m\mathcal{R}_\eta^\mu\mathcal{R}_\delta^\nu\int\mathcal{K}^\eta\mathcal{K}^\delta f^{(1)}d\mathcal{K}^* = m\mathcal{L}_i^\mu\mathcal{L}_j^\nu\int\mathcal{K}^i\mathcal{K}^j f^{(1)}d\mathcal{K}^* \quad (90)$$

de manera que a  $\Pi_{[0]}^{\alpha\beta}$  se le puede llamar el tensor de Navier-Newton calculado en el marco donde el fluido esté en reposo y así:

$$\Pi_{[0]}^{\mu\nu} = mh_\alpha^\mu h_\beta^\nu\int\mathcal{K}^\alpha\mathcal{K}^\beta f d\mathcal{K}^* = m\delta_i^\mu\delta_j^\nu\int\mathcal{K}^i\mathcal{K}^j f d\mathcal{K}^* \quad (91)$$

y desde ese marco  $h_4^\mu = 0$  y  $h_i^\mu = \delta_i^\mu$ . Así que el tensor de segundo rango introducido en el tensor de energía-esfuerzo es:

$$\tau^{\mu\nu} = ph^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu} \quad (92)$$

donde

$$\Pi^{\mu\nu} = \mathcal{L}_\alpha^\mu\mathcal{L}_\beta^\nu\Pi_{[0]}^{\alpha\beta} \quad (93)$$

es el tensor de Navier-Newton en un sistema de referencia inercial arbitrario.

Así entonces, se ha establecido el tensor de energía-esfuerzo para un gas diluido mono-componente en el marco de la relatividad especial, considerando que la velocidad molecular contiene dos contribuciones, a saber, la hidrodinámica y la caótica. Para lograrlo se introdujeron las transformaciones de Lorentz que relacionan la velocidad de la partícula medida por un observador en un sistema de referencia arbitrario  $S$  con la velocidad de la partícula medida dentro de un diferencial de volumen que se mueve con una velocidad hidrodinámica  $U^\mu$ , obteniéndose la expresión utilizada por Eckart (la cual había sido introducida fenomenológicamente).

Se debe enfatizar que todos los términos involucrados en el tensor de energía-esfuerzo han sido obtenidos desde la teoría cinética usando el concepto de velocidad caótica. Se observa también, que los dos primeros términos corresponden a las contribuciones en equilibrio, es decir, usando solamente  $f^{(0)}$ . Además se muestra que los términos disipativos aparecen en forma natural cuando se considera los promedios de la energía cinética y los flujos de momento, y que el flujo de calor posee las propiedades de un tensor de primer rango. Por último vale la pena mencionar que tanto el flujo de calor como el de momento conllevan a términos no lineales en el sistema de ecuaciones de transporte, que para este trabajo no se toman en cuenta, pero es un punto que se puede abordar posteriormente.

Para finalizar esta sección se puede observar que  $dv^* = d\mathcal{K}^*$  ya que  $dv^*$  es una cantidad invariante [23]. La expresión (91) posibilita el cálculo de variables termodinámicas tales como la viscosidad, ya que en el sistema comóvil  $\mathcal{L}_\alpha^\mu$  y  $\mathcal{L}_\beta^\nu$  se convierten en deltas de Kronecker  $\delta_\nu^\mu$ , obteniéndose la expresión para el tensor de energía-esfuerzo:

$$T^{\mu\nu} = m \int \mathcal{K}^\mu \mathcal{K}^\nu f d\mathcal{K}^* \quad (94)$$

que al ser desarrollado convenientemente, y después de simplificar conduce a la ecuación de balance del momento, dado por:

$$\left(\frac{n\varepsilon}{c^2} + \frac{p}{c^2}\right) \dot{u}_\nu + \left(\frac{n\dot{\varepsilon}}{c^2} + \frac{p}{c^2}\theta\right) u_\nu + p_{,\mu} h_\nu^\mu + \Pi_{\nu;\mu}^\mu + \frac{1}{c^2} (q_{;\mu}^\mu u_\nu + q^\mu u_{\nu;\mu} + \theta q_\nu + u^\mu q_{\nu;\mu}) = 0. \quad (95)$$

Es pertinente recordar que los efectos gravitacionales se encuentran implícitos en la derivada total del primer término de la ecuación (95).

## CAPÍTULO IV

# Análisis de la inestabilidad de Jeans utilizando la ecuación propuesta por Eckart

### INTRODUCCIÓN

Finalmente hemos llegado a la parte central de este trabajo, donde se muestra la metodología seguida para tratar de obtener el número de onda de Jeans, dentro del marco de la formación de estructuras astrofísicas, considerando un fluido simple (un gas de partículas de masa  $m$ ), no degenerado, relativista (relatividad especial) ( $KT/mc^2 \sim 1$ ), en el cual existen efectos disipativos (viscosidad y flujos de calor) e inmerso en un campo gravitacional débil. En este proceso se utilizaron, para completar el sistema de ecuaciones de transporte, dos ecuaciones constitutivas para el flujo de calor. La primera, fue la ecuación propuesta por Eckart en 1940, la cual fue obtenida fenomenológicamente en base a la necesidad de mantener la producción de entropía positiva. Además, dicha ecuación muestra un acoplamiento con la aceleración hidrodinámica, situación que introduce serias anomalías en los resultados. La segunda ecuación, obtenida por el grupo del *Dr. García – Colín*<sup>†</sup> en base a la teoría cinética, y que denominaré en adelante ecuación constitutiva GSG, conduce a resultados libres de inconsistencias. Ésta se tratará en el siguiente capítulo.

Como se mencionó al principio, gracias a las observaciones e innumerables estudios astronómicos realizados sobre el espacio que nos rodea, se puede asegurar que el universo es un sistema dinámico, donde continuamente se están llevando a cabo procesos de formación y destrucción de estructuras astrofísicas. En particular, las mediciones indican que las *formaciones de estas estructuras se realizan gracias a los efectos del campo gravitacional*, existiendo condiciones críticas para ello [1, 2, 17]. En 1902 James Jeans presenta un estudio de este fenómeno y muestra que deben existir ciertas condiciones para que pueda darse un colapso gravitacional y por ende la formación de una estructura. Dichas condiciones están determinadas por parámetros bien definidos, denominados, longitud y masa de Jeans, los cuales se calculan a partir del número de ondas de Jeans. Éstos determinan tanto las dimensiones del volumen que contiene a una nube de gas, como la cantidad de masa que debe contener para

generar condiciones de inestabilidad. Así mismo, se tienen establecidos tiempos característicos de formación de estructuras (generalmente muy grandes comparados con los tiempos de colisiones entre partículas en un gas diluido). Estos tiempos como es de esperarse son dependientes de los efectos gravitacionales y de la densidad del gas ( $t \sim (4\pi G\rho)^{-1/2}$ ), donde  $G$  es la constante gravitacional y  $\rho$  la densidad de masa. Para establecer dichos parámetros, se recurre a caminos fenomenológicos o a alternativas sustentadas por la teoría cinética (ambos criterios deben coincidir).

Asimismo, los desarrollos utilizan modelos tales como un universo estático o bien en expansión o constituido por materia y/o energía oscura. Estos modelos involucran el estudio de las perturbaciones lineales de la densidad de masa alrededor del equilibrio, bajo la suposición de que las leyes de conservación de masa, momentum y energía se cumplen a lo largo de los procesos de formación. Se encuentra también que en esta aproximación, las fluctuaciones de la densidad satisfacen una ecuación de onda, cuyas soluciones establecen varios escenarios que nos llevan a comportamientos de propagación de ondas amortiguadas, decaimiento exponencial de las perturbaciones *o bien crecimiento exponencial de las fluctuaciones de la densidad*, que posibilita la formación de estructuras, comprobándose estos valores críticos al observarse la naturaleza [17]. Por otro lado, se sabe que los procesos disipativos están siempre presentes en los fenómenos reales, por lo que los efectos de la viscosidad y el flujo de calor sobre la determinación de los parámetros críticos presentes en el colapso gravitacional, han sido tratados por varios autores [4–6], la mayoría de esos trabajos usan un marco de referencia clásico (no relativista). Sin embargo, en contextos donde prevalecen las altas temperaturas también existen dichos procesos disipativos.

Ahora bien, estudiando la causalidad y estabilidad de fluidos relativistas Hiscock y Lindblom encontraron la primera inestabilidad genérica, la cual se refleja en la obtención de tiempos característicos muy cortos para el crecimiento de las fluctuaciones de densidad. Encontraron que si se emplea la ecuación constitutiva para el flujo de calor propuesta por Eckart, las fluctuaciones de densidad en un fluido a temperatura ambiente y a presión atmosférica crecerían exponencialmente con tiempos característicos del orden de  $10^{-34}$  seg, s [9]. Siendo importante remarcar que, aunque en su trabajo la gravedad está implícitamente considerada a través de las derivadas covariantes incluidas, es importante desarrollar el cálculo explícito del efecto gravitacional en el tiempo de crecimiento característico. Este objetivo se logró usando la ecuación de Poisson, que describe la forma aproximada del comportamiento del

potencial gravitacional presente en situaciones astrofísicas típicas [33]. El resultado correspondiente es muy importante, ya que muestra que el acoplamiento flujo de calor - aceleración hidrodinámica es responsable de la existencia de las inestabilidades genéricas encontradas por H y L [30],

De manera que, como ellos no consideraron los efectos gravitacionales en forma explícita, surgió la pregunta de si al incluirlos se eliminarían las patologías. Es decir, con todo lo expresado anteriormente cabe la pregunta: ¿Si tales inestabilidades persisten al trabajar el problema de la inestabilidad de Jeans en un fluido relativista? el cual incluye explícitamente los efectos del campo gravitacional [12, 34, 35]. Pues bien, en este capítulo se muestra que la consideración del campo gravitacional junto con el acoplamiento del flujo calor y la aceleración hidrodinámica en el marco de referencia de la hidrodinámica relativista aun conduce a un comportamiento patológico respecto a los tiempos característicos observados en los cuales el colapso gravitacional se lleva a cabo. Hasta donde sabemos este resultado es nuevo.

Lo anterior deja la puerta abierta para incursionar en problemáticas que involucren gases relativistas con la seguridad de que los resultados obtenidos cuentan con un soporte microscópico apropiado. Para mostrar este hecho se utilizó el desarrollo siguiente.

Se considera la variación lineal de las fluctuaciones de la densidad de masa alrededor del equilibrio. Un factor que no se debe dejar de lado es que el valor asignado al equilibrio es el resultado de un promedio estadístico, así por ejemplo, la temperatura del diferencial de volumen en el espacio fase estará dada por  $T = T_0 + \delta T$ , donde  $T_0$  representa dicho promedio y  $\delta T$  la variación alrededor de  $T_0$ .

Comencemos por las ecuaciones de conservación mencionadas anteriormente. La primera, la ecuación de conservación de partículas que está dada por:

$$N_{;\mu}^{\mu} = 0 \tag{96}$$

donde  $N$  denota el flujo de partículas dado por  $N^{\mu} = nu^{\mu}$  con  $n$  como el número de partículas por unidad de volumen y  $u^{\mu}$  la velocidad hidrodinámica.

La segunda ecuación corresponde a la conservación del 4-momento:

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0. \tag{97}$$

Las componentes espaciales de (97) corresponden a la conservación del ímpetu.

Finalmente para obtener la tercera ecuación que corresponde a la ecuación de balance de energía interna, se recurre a la proyección del balance de energía-momento en la dirección de la cuadrivelocidad hidrodinámica, es decir,

$$u^\nu T_{\nu;\mu}^\mu = 0 \quad (98)$$

#### IV.1 ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Dado que este conjunto de ecuaciones contiene más incógnitas que ecuaciones, se recurre a las ecuaciones constitutivas para completarlo y poder resolverlo, en este caso utilizamos las ecuaciones constitutivas propuestas por Eckart para el tensor de Navier y para el flujo de calor dadas por [7]:

$$\Pi_\nu^\mu = -2\eta h_\alpha^\mu h_\nu^\beta \tau_\beta^\alpha - \zeta \theta \delta_\nu^\mu \quad (99)$$

$$q^\nu = -\kappa h_\mu^\nu \left( T^{,\mu} + \frac{T}{c^2} \dot{u}^\mu \right). \quad (100)$$

donde:  $\Pi_\nu^\mu$  es el tensor viscoso (o tensor de Navier),  $\eta$  y  $\zeta$  son la viscosidad cortante y volumétrica respectivamente,  $\theta = u_{,\mu}^\mu$ ,  $q^\nu$  es el flujo de calor,  $\kappa$  es la conductividad térmica,  $T$  es la temperatura,  $c$  es la velocidad de la luz y  $h_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \frac{u^\mu u_\nu}{c^2}$  es el proyector espacial.

Así que introduciendo estas ecuaciones en el sistema de ecuaciones de conservación se obtiene, después del álgebra correspondiente, y considerando al tensor de energía-esfuerzo obtenido en el capítulo anterior:

$$\dot{n} + n\theta = 0 \quad (101)$$

$$\left( \frac{n\varepsilon}{c^2} + \frac{p}{c^2} \right) \dot{u}_\nu + \left( \frac{n\dot{\varepsilon}}{c^2} + \frac{p}{c^2} \theta \right) u_\nu + p_{,\mu} h_\nu^\mu + \Pi_{\nu;\mu}^\mu + \frac{1}{c^2} (q_{,\mu}^\mu u_\nu + q^\mu u_{\nu;\mu} + \theta q_\nu + u^\mu q_{\nu;\mu}) = 0 \quad (102)$$

$$nC_n \dot{T} + p\theta + u_{,\mu}^\nu \Pi_\nu^\mu + q_{,\mu}^\mu + \frac{1}{c^2} \dot{u}^\nu q_\nu = 0 \quad (103)$$

en donde,  $\varepsilon$  es la energía interna por partícula,  $p$  es la presión local, y se satisfacen las relaciones de ortogonalidad  $u_\mu \Pi_\nu^\mu = u^\nu \Pi_\nu^\mu = 0$  y  $q_\mu u^\mu = q^\mu u_\mu = 0$ . Además se consideró que  $\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n}\right)_T \dot{n} + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_n \dot{T}$  donde  $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_n = C_n$  es la capacidad calorífica por partícula.

## IV.2 ECUACIONES LINEALIZADAS

A fin de examinar el comportamiento de las fluctuaciones  $\delta X$  de las variables termodinámicas  $X$  alrededor de sus valores de equilibrio  $X_0$ , se sustituyeron estas variables por  $X = X_0 + \delta X$ , y después del álgebra correspondiente, despreciando los términos no lineales se llegó al sistema de ecuaciones obtenido desde el marco de referencia comóvil  $\vec{u}_0 = 0$ , dado por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta n) + n_0 \delta \theta = 0 \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (\delta \theta) + \left( \frac{n \dot{\varepsilon}}{c^2} + \frac{p}{c^2} \theta \right) u_\nu + K T_0 \nabla^2 (\delta n) + n_0 K \nabla^2 (\delta T) - A \nabla^2 (\delta \theta) \\ - \frac{\kappa}{c^2} \nabla^2 \frac{\partial}{\partial t} (\delta T) - \frac{\kappa T_0}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\delta \theta) = \tilde{\rho} \nabla^2 (\delta \varphi) \end{aligned} \quad (105)$$

$$n C_n \frac{\partial}{\partial t} (\delta T) + n_0 K T_0 (\delta \theta) - \kappa \left( \delta T^{,l} + \frac{T_0}{c^2} (\delta \dot{u}^l) \right)_{,l} = 0 \quad (106)$$

donde  $\tilde{\rho} = \frac{n \dot{\varepsilon}}{c^2} + \frac{p}{c^2}$ , y  $\nabla^2 (\delta \varphi) = -4\pi G m \delta n$  corresponde a la ecuación de Poisson, para las fluctuaciones del campo gravitacional.

Para resolver el sistema (104-106) se aplicó la transformada de Laplace en el tiempo ( $\sim$ ) y posteriormente la transformada de Fourier en el espacio ( $\hat{\cdot}$ ). Es decir, para una fluctuación termodinámica dada  $\delta X(\vec{r}, t)$ , la correspondiente transformada de Fourier-Laplace se denota como  $\delta \hat{X} = \delta \hat{X}(\vec{q}, s)$ . Este procedimiento permite resolver el sistema de manera algebraica. Las ecuaciones obtenidas quedaron expresadas finalmente en la siguiente forma:

$$s \left( \delta \hat{n} \right) + n_0 \left( \delta \hat{\theta} \right) = \delta \hat{n}(\vec{q}, 0) \quad (107)$$

$$-q K T_0^2 \left( \delta \hat{n} \right) + 4\pi G m^2 n_0 \left( \delta \hat{n} \right) + \tilde{\rho}_0 s \left( \delta \hat{\theta} \right) + A q^2 \left( \delta \hat{\theta} \right) - \frac{\kappa T_0}{c^4} s^2 \left( \delta \hat{\theta} \right) - q^2 n_0 K \left( \delta \hat{T} \right)$$

$$-\frac{\kappa q^2}{c^2} s \left( \delta \hat{T} \right) = -\frac{\kappa T_0}{c^4} s \delta \tilde{\theta}(\vec{q}, 0) + \tilde{\rho}_0 \delta \tilde{\theta}(\vec{q}, 0) - \frac{\kappa}{c^2} \delta \tilde{T}(\vec{q}, 0) \quad (108)$$

$$n_0 K T_0 \left( \delta \hat{\theta} \right) - \frac{\kappa T_0}{c^2} s \left( \delta \hat{\theta} \right) + n_0 C_n s \left( \delta \hat{T} \right) + \kappa q^2 \left( \delta \hat{T} \right) = \delta \tilde{T}(\vec{q}, 0) + \frac{\kappa T_0}{c^2} \delta \tilde{\theta}(\vec{q}, 0) \quad (109)$$

### IV.3 ECUACION DE DISPERSIÓN

Ya con el sistema expresado de esta manera, es posible obtener la relación de dispersión asociada, la cual nos da información sobre el comportamiento de las fluctuaciones termodinámicas. Para establecer las propiedades dinámicas se calcula el determinante del sistema y se iguala a cero, obteniéndose:

$$\begin{vmatrix} s & n & 0 \\ K T_0 q^2 + 4\pi G m^2 n_0 & \tilde{\rho}_0 s + A q^2 - \frac{\kappa T_0}{c^4} s^2 & \frac{\kappa q^2}{c^2} s - q^2 n_0 K \\ 0 & n_0 K T_0 - \frac{\kappa T_0}{c^2} s & C_n n_0 s + \kappa q^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (110)$$

cuyo cálculo permite establecer la relación de dispersión siguiente:

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \quad (111)$$

donde

$$a_4 = -\frac{\kappa C_n n_0 T_0}{c^4} \quad (112)$$

$$a_3 = C_n n_0 \tilde{\rho}_0 \quad (113)$$

$$a_2(q) = A C_n n_0 q^2 - \frac{2\kappa n_0 K T_0}{c^2} q^2 + \kappa \tilde{\rho}_0 q^2 \quad (114)$$

$$a_1(q) = -4\pi G m^2 n_0^3 C_n + C_n n_0^2 K T_0 q^2 + n_0^2 K^2 T_0 q^2 + A \kappa q^4 \quad (115)$$

$$a_0(q) = -4\pi G m^2 n_0^2 \kappa q^2 + n_0 K T_0 \kappa q^4 \quad (116)$$

Ecuaciones como la (111) suelen obtenerse en el análisis de las fluctuaciones en fluidos no relativistas [21]. En ausencia de efectos relativistas esta ecuación se reduce a una ecuación cúbica que ha sido analizada exhaustivamente [18, 20]. La introducción del campo gravitacional en los cálculos fue realizada apenas unos pocos años atrás y junto con las altas temperaturas se ha encontrado correcciones al número de onda de Jeans debido a los efectos viscosos [6]. Nótese que los efectos gravitacionales en nuestro caso solo aparecen en los coeficientes  $(a_1, a_0)$  mientras que en el coeficiente  $a_4$ , en el denominador aparece  $c^4$  lo que genera en la relación de dispersión una raíz muy grande. Por lo que, utilizando el método propuesto por Mountain en un contexto no-relativista [18, 20], aproximando una solución como una serie de potencias en  $q$ , como  $s = \alpha + \beta q + \Gamma q^2$  y sustituyéndola en la ecuación de dispersión (111), se obtiene:

$$-\frac{\kappa C_n n_0 T_0}{c^4} + n_0 \alpha^3 \rho_0 - 4\pi G \rho_0^2 \alpha = 0. \quad (117)$$

Se puede observar que si elimina el tercer término que incluye el campo gravitacional se recupera el mismo resultado obtenido por Hiscock y Lindblom (en cuyo trabajo no consideraron explícitamente efectos gravitacionales) [9], es decir, se genera una raíz no trivial dada por:  $\alpha = \frac{\rho_0 c^4}{\kappa T_0}$ . Así, si se consideran solo perturbaciones lineales para esta solución, es decir  $s = \frac{\rho_0 c^4}{\kappa T_0} + \varepsilon$ , se obtiene la ecuación:

$$-\frac{4\pi G}{c^4} \varepsilon - \frac{\rho_0 c^4}{(\kappa T_0)^2} \varepsilon - \frac{4\pi G \rho_0}{\kappa T_0} = 0 \quad (118)$$

la cual nos lleva al *siguiente tiempo característico para la formación de estructuras*:

$$\tau^{-1} = s_0 - \frac{\omega^2}{s_0 + \frac{s_0}{\omega^2}} \quad (119)$$

donde  $s_0 = \frac{\rho_0 c^4}{\kappa T_0}$  y  $\omega^2 = 4\pi G \rho_0$ . Con este importante resultado se se reitera que el uso de la ecuación constitutiva propuesta por Eckart para completar el sistema de ecuaciones de transporte, la cual involucra el acoplamiento del flujo de calor con la aceleración hidrodinámica, genera una relación de dispersión de cuarto grado misma que al resolverse apropiadamente, lleva a resultados que no se observan en la naturaleza. Es decir, se puede apreciar que *la ecuación constitutiva de Eckart predice que los efectos gravitacionales son opacados por otros*

*procesos* (como los térmicos), lo cual va en contra de lo observado. Y también se observa que los tiempos de formación son demasiados pequeños al compararse con los resultados encontrados en la literatura (que son del orden de  $(4\pi G\rho)^{-\frac{1}{2}}$ ). Por lo anterior, es imperativo concluir que no se puede considerar un flujo de calor acoplado a una aceleración hidrodinámica, si lo que se desea es tener un modelo que describa el inicio de la formación de estructuras interestelares considerando altas temperaturas y efectos viscosos en el proceso.

Es importante entonces recurrir a otro tipo de ecuación constitutiva como lo proponen Hiscock y Lindblom en su trabajo, al encontrar que en el estudio de fluidos relativistas el uso de esa ecuación constitutiva genera inestabilidades genéricas. En nuestro caso empleamos ecuaciones constitutivas a primer orden en los gradientes de las variables termodinámicas locales.

## CAPÍTULO V

# Análisis de la inestabilidad de Jeans utilizando la ecuación constitutiva obtenida a partir de la teoría cinética: (ecuación GSG)

### INTRODUCCIÓN

Como se observó anteriormente el uso de la ecuación constitutiva propuesta por Eckart en 1940, expresada como:

$$q^\mu = -\kappa h_\nu^\mu \left( T^{,\nu} + \frac{T}{c^2} \dot{u}^\nu \right)$$

introduce inestabilidades genéricas al usarse en distintos contextos [31, 37] y en particular en el campo de la formación de estructuras astrofísicas, en donde al utilizarla se pierde el efecto del campo gravitacional como principal agente causante en la formación de las mismas.

### V.1 ECUACIÓN CONSTITUTIVA

Así, en esta parte del trabajo se retoma el problema analizando el comportamiento de las fluctuaciones de la densidad de partículas, en el mismo escenario que se utilizó en el capítulo anterior, pero haciendo el análisis con la ecuación constitutiva GSG para el flujo de calor, obtenida por el grupo del Dr. García-Colín [12, 25], la cual no presenta el acoplamiento con la aceleración hidrodinámica, pero sí, con los gradientes de temperatura y densidad, es decir, es consistente con el formalismo cinético a primer orden en los gradientes. Su expresión esta dada por:

$$q^\mu = -h_\nu^\mu (L_{TT} T^{,\nu} + L_{nT} n^{,\nu}). \quad (120)$$

Los coeficientes de transporte correspondientes están dados en una primera aproximación por [26]:

$$L_{TT} = \kappa \left( 1 + \frac{KT_0}{mc^2} \right) = \kappa(1 + z) \quad (121)$$

$$L_{nT} = \kappa \left( \frac{KT_0^2}{n_0 mc^2} \right) = \kappa \left( \frac{T_0}{n_0} z \right) \quad (122)$$

en donde  $\kappa = \frac{5}{4} \frac{nKT}{m_e} (2,01\tau_{col})$  es la conductividad térmica usual,  $m_e$  es la masa del electrón y  $\tau_{col}$  es el tiempo colisional, que para un plasma completamente ionizado está dado por:

$$\tau_{col} = \frac{4(2\pi)^{3/2} \sqrt{m_e \epsilon_0^2} (KT_0)^{3/2}}{ne^4 \psi} \quad (123)$$

donde  $\psi = \text{Log} \left[ 1 + \left( \frac{16\pi KT_0 \epsilon_0 \lambda_D}{e^2} \right)^2 \right]$ ,  $\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 KT_0}{n_0 e^2}}$  es la longitud de Debye,  $e$  es la carga del electrón y  $\epsilon_0$  es la constante eléctrica (permitividad) [39].

## V.2 ECUACIONES LINEALIZADAS

Recordemos que en un gas autogravitante newtoniano el efecto del campo aparece a través del potencial gravitacional ordinario  $\varphi$ . Ahora bien, dado que las ecuaciones de continuidad (101) y calor (103) están acopladas únicamente a través de la divergencia de las fluctuaciones de la velocidad  $\delta\theta$ , es conveniente calcular la divergencia y el rotacional de la ecuación de balance de momento (102). En este caso al linealizar las tres ecuaciones anteriores (101), (102) y (103), se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta n) + n_0 \delta\theta = 0 \quad (124)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (\delta\theta) + KT_0 \nabla^2 (\delta n) + n_0 K \nabla^2 (\delta T) - A \nabla^2 (\delta\theta) \\ & - L_{TT} \nabla^2 (\delta \dot{T}) - \frac{L_{nT}}{c^2} \nabla^2 (\delta \dot{n}) = -4\pi G m \tilde{\rho}_0 \nabla^2 (\delta n) \end{aligned} \quad (125)$$

$$n_0 C_n \frac{\partial}{\partial t} (\delta T) + n_0 KT_0 (\delta\theta) - L_{TT} \nabla^2 (\delta T) - L_{nT} \nabla^2 (\delta n) = 0 \quad (126)$$

donde por conveniencia se definió a  $\tilde{\rho} = (n_0\varepsilon_0 + p_0)/c^2$  y  $A = \zeta + \frac{4}{3}\eta$ . Es importante recordar que el fluido se considera en reposo y el observador se encuentra en el marco comóvil, de manera que el valor en equilibrio de la velocidad hidrodinámica desaparece. Por lo tanto el sistema de ecuaciones (124 - 126) constituye el sistema de ecuaciones linearizado para un fluido relativista a primer orden en los gradientes, considerando un campo gravitacional débil (newtoniano). Así para resolverlo recurrimos a su análisis en el espacio de Laplace-Fourier, para conocer el comportamiento de las fluctuaciones de densidad.

Al aplicarse primero la transformada de Laplace (en el tiempo) y posteriormente la transformada de Fourier (en el espacio) se llega al siguiente sistema algebraico de ecuaciones dado por:

$$s \left( \delta \hat{n} \right) + n_0 \left( \delta \hat{\theta} \right) = \delta \tilde{n}(\vec{q}, 0) \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \left( -KT_0q^2 + \frac{L_{nT}}{c^2}sq^2 + 4\pi Gm\tilde{\rho}_0 \right) \left( \delta \hat{n} \right) + (Aq^2 + \tilde{\rho}_0s) \left( \delta \hat{\theta} \right) + \left( \frac{L_{TT}}{c^2}sq^2 - n_0Kq^2 \right) \left( \delta \hat{T} \right) = \\ = \frac{L_{nT}}{c^2}q^2\delta \tilde{n}(\vec{q}, 0) + \delta \tilde{\theta}\tilde{\rho}_0(\vec{q}, 0) + \frac{L_{TT}}{c^2}q^2\delta \tilde{T}(\vec{q}, 0) \end{aligned} \quad (128)$$

$$L_{nT}q^2 \left( \delta \hat{n} \right) + n_0KT_0 \left( \delta \hat{\theta} \right) + (C_n n_0 s + L_{TT}q^2) \left( \delta \hat{T} \right) = C_n n_0 \delta \tilde{T}(\vec{q}, 0) \quad (129)$$

### V.3 ECUACIÓN DE DISPERSIÓN

Al igualar el determinante del sistema a cero,

$$\begin{vmatrix} s & n_0 & 0 \\ -KT_0q^2 + \frac{L_{nT}}{c^2}sq^2 + 4\pi Gm\tilde{\rho}_0 & Aq^2 + \tilde{\rho}_0s & \frac{L_{TT}}{c^2}sq^2 - n_0Kq^2 \\ L_{nT}q^2 & n_0KT_0 & C_n n_0 s + L_{TT}q^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (130)$$

se obtiene una *relación de dispersión cúbica*

$$b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0 = 0 \quad (131)$$

donde los coeficientes están dados por:

$$\begin{aligned}
b_3 &= 1, \\
b_2(q) &= \left( \frac{A}{\tilde{\rho}_0} + \frac{L_{TT}}{C_n n_0} - \frac{KT_0 L_{TT}}{\tilde{\rho}_0 c^2 C_n} - \frac{n_0 L_{nT}}{\tilde{\rho}_0 c^2} \right) q^2, \\
b_1(q) &= \frac{AL_{TT}}{\tilde{\rho}_0 n_0 C_n} q^4 + \frac{5KT_0 n_0}{3\tilde{\rho}_0} q^2 - 4\pi G m n_0, \\
b_0(q) &= \left( \frac{KT_0 L_{TT}}{\tilde{\rho}_0 n_0} - \frac{K n_0 L_{nT}}{\tilde{\rho}_0 n_0} \right) q^4 - \frac{4\pi G m L_{TT}}{C_n} q^2. \tag{132}
\end{aligned}$$

Nótese que si se considera el caso en el cual los efectos disipativos son despreciables, es decir, cuando  $A, L_{TT}, L_{nT} \rightarrow 0$ , la solución de la ecuación de dispersión nos lleva directamente a la expresión para el número de onda de Jeans

$$\tilde{q}_J^2 = \frac{4\pi G m n_0}{C_s^2} \tag{133}$$

donde

$$C_s^2 = \frac{n_0 K T_0}{\tilde{\rho}_0} \left( 1 + \frac{K}{C_n} \right) \tag{134}$$

representa la velocidad del sonido en el medio. La ecuación (134) se convierte en  $C_s^2 = \frac{5KT_0}{3m}$  al considerar el límite no relativista donde  $\tilde{\rho}_0 \sim m n_0$  y  $C_n = \frac{3K}{2}$  con lo que se llega al valor conocido del número de onda de Jeans.

Para resolver la ecuación (131), se consideró el caso sin campo gravitacional lo que nos lleva a una solución real, la cual corresponde al llamado pico de Rayleigh y dos raíces imaginarias las cuales están asociadas a los picos de Brillouin. Este espectro se obtiene al hacer pasar un haz de luz a través de un gas en movimiento. Para más detalles se puede recurrir a las referencias [19–21]. Con base en estos resultados, se consideró que el pico de Rayleigh no se modifica significativamente por la presencia del campo gravitacional, de manera que se tomó una raíz de la relación de dispersión de la forma  $s = \gamma q^2$  donde la condición se satisface si:

$$\gamma = -\frac{L_{TT}}{n_0 C_n} \tag{135}$$

de manera que bajo esta hipótesis se puede factorizar (131) como sigue:

$$(s + \gamma q^2)(s^2 + \mu s + \nu) = 0. \quad (136)$$

Si se mantienen sólo los términos en  $q$  y  $q^2$  se llega a que los otros coeficientes tienen la forma:

$$\mu = \frac{1}{\tilde{\rho}_0} \left( A - \frac{n_0 L_{nT}}{c^2} - \frac{KT_0 L_{TT}}{c^2 C_n} \right) q^2 \quad (137)$$

$$\nu = -4\pi G m n_0 + \frac{n_0 K T_0}{\tilde{\rho}_0} \left( 1 + \frac{K}{C_n} \right) q^2 \quad (138)$$

Así que el valor límite para los modos de crecimiento de las fluctuaciones de densidad se extrae directamente del discriminante del polinomio de segundo grado dado en (136), esto es

$$\left( A - \frac{n_0 L_{nT}}{c^2} - \frac{KT_0 L_{TT}}{c^2 C_n} \right)^2 q^4 - 4n_0 K T_0 \tilde{\rho}_0 \left( 1 + \frac{K}{C_n} \right) q^2 + 16\pi G m n_0 T_0 \tilde{\rho}_0^2 = 0 \quad (139)$$

en donde los términos que contienen a  $\frac{1}{c^4}$  se han despreciado. La solución algebraica de la ecuación (139) es:

$$q^2 = \frac{2C_s^2 \tilde{\rho}_0^2}{A \left( A - \frac{2n_0 L_{nT}}{c^2} - \frac{4T_0 L_{TT}}{3c^2} \right)} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4\pi G}{C_s^4 \tilde{\rho}_0} A \left( A - \frac{2n_0 L_{nT}}{c^2} - \frac{4T_0 L_{TT}}{3c^2} \right)} \right] \quad (140)$$

Como se mencionó anteriormente, este número de onda corresponde al límite entre los modos de oscilación y crecimiento exponencial. Es oportuno recordar que la ecuación de dispersión obtenida en la sección anterior era de cuarto grado en  $s$ , *cuya raíz dominante eliminaba cualquier posibilidad de formación de estructuras por medios gravitacionales y en los tiempos observados.*

Este resultado es relevante y muestra que la nueva ecuación constitutiva (GSG) nos permite encontrar una corrección relativista al número de onda de Jeans. Para evaluar aproximadamente dicha corrección se puede expresar de una manera simplificada la ecuación (140), obteniéndose:

$$q^2 = \tilde{q}_J^2 \left[ 1 + \frac{\pi G A}{C_s^4 \tilde{\rho}_0} \left( A - \frac{2n_0 L_{nT}}{c^2} - \frac{4T_0 L_{TT}}{3c^2} \right) \right] \quad (141)$$

donde  $\tilde{q}_J^2$  corresponde al valor del número de onda de Jeans corregido por los valores de  $\tilde{\rho}_0$  y  $C_s^2$ . Debe observarse que la corrección va más allá de la sola aproximación con el número de onda de Jeans,  $q^2 \sim \tilde{q}_J^2$  que involucra los efectos disipativos y el campo gravitacional. Las correcciones relativistas dependen del flujo de calor y su acoplamiento con los efectos viscosos, proporcionando un interesante e importante resultado, ya que da sentido a los efectos que produce la disipación en sistemas relativistas e invita a seguir investigando en este sentido.

El límite no relativista se puede obtener considerando que  $c^2$  es muy grande respecto al numerador, por lo que (141) queda como:

$$q^2 = q_J^2 \left[ 1 + \frac{\pi G A^2}{C_s^4 \tilde{\rho}_0} \right]$$

ecuación que es igual al resultado obtenido en la referencia [6], con el resultado particular de que si se considera un medio no disipativo se recupera el valor clásico del número de onda de Jeans, es decir,  $q^2 = q_J^2$ . De esta manera, la introducción de una ecuación constitutiva para el flujo de calor en términos de los gradientes de las variables escalares de estado, temperatura, densidad y presión, asegura que el colapso gravitacional es posible para un sistema relativista siguiendo el mismo razonamiento que para un sistema no relativista. En otras palabras se establecería un número de onda crítico que indica el rango de valores para los cuales se puede dar el colapso y por lo tanto la formación de estructuras dentro de un gas.

Con la intención de dar un ejemplo ilustrativo, tomemos un gas de electrones con  $z \sim 1$ , con una densidad de  $n_0 = 10^{16} m^{-3}$ . Utilizando los coeficientes de transporte especificados anteriormente, se obtienen tiempos característicos de formación de estructuras del orden de  $\tau \sim (4\pi G \rho)^{-\frac{1}{2}}$ , lo cual concuerda con las observaciones.

En este capítulo se desarrolló un procedimiento similar al del anterior, sólo que en este caso, se utilizó la ecuación constitutiva GSG para el flujo de calor en favor del formalismo de primer orden en los gradientes. Se estableció un importante hecho: al estudiar la formación de estructuras (inestabilidad de Jeans) bajo un formalismo relativista con esta ecuación, se obtienen correcciones al número de onda de Jeans de carácter perturbativo, y si se reduce la

temperatura a valores clásicos, los efectos disipativos se vuelven irrelevantes recuperándose los resultados no relativistas. Lo anterior es muy importante, en el sentido de que se aclara el camino respecto a las herramientas apropiadas para describir la evolución de un gas en un contexto relativista, lo cual permitirá abordar nuevas problemáticas con la confianza de que al menos a primer orden en los gradientes, los resultados que se obtengan estarán de acuerdo con las observaciones y no aparezcan patologías. Esta situación no sucede al usarse la ecuación constitutiva de Eckart, tal y como se mostró en el capítulo anterior.

Ahora bien, en nuestra opinión, aun si las correcciones no son significativas en orden de magnitud en los fenómenos astrofísicos fundamentales, el hecho de que el formalismo a primer orden carezca de patologías, mientras se describe el colapso gravitacional, nos da una fuerte evidencia para considerarla adecuada en la descripción de la física de la conducción de calor en gases relativistas.

# CAPÍTULO VI

## Conclusiones y perspectivas

En las últimas décadas, ha surgido una intensa investigación para determinar cuál es el formalismo correcto para describir los procesos disipativos en la hidrodinámica relativista. En este trabajo se mostró que los problemas de causalidad y estabilidad no son una preocupación cuando se utiliza una ecuación constitutiva obtenida a partir de la teoría cinética, utilizando el método de Chapman y Enskog. Si se considera que las fluctuaciones de la velocidad hidrodinámica no desaparecen en el marco comóvil, se garantiza la causalidad del sistema. Esta es una suposición completamente razonable tanto para un fluido en reposo como para un observador en el marco comóvil, donde la velocidad en equilibrio se desvanece (es cero). Aquí estamos considerando que las fluctuaciones de las variables del formalismo hidrodinámico dentro de un marco fundamental estadístico, surgen espontáneamente y están siempre presentes [27]. Por otro lado, la estabilidad se relaciona principalmente con el análisis de la relajación de las fluctuaciones más allá de la inestabilidad hidrodinámica de tipo geométrico. Se mostró que el comportamiento patológico del sistema obtenido al utilizar el formalismo propuesto por Eckart, desaparece cuando se incluyen los gradientes a primer orden en el balance de momentum a través de la ecuación constitutiva GSG para el flujo de calor. Este hecho nos lleva a afirmar categóricamente que las teorías extendidas no son estrictamente necesarias y que las teorías a primer orden en los gradientes de las variables termodinámicas locales, son apropiadas físicamente siempre y cuando los resultados de la teoría cinética sean usados para completar el sistema de ecuaciones de transporte relativista.

El estudio de las inestabilidades genéricas encontradas por Hiscock y Lindblom [9] ha motivado una intensa investigación para determinar cuál es la ecuación constitutiva que debe utilizarse, de manera que se cuente con un formalismo correcto para describir los procesos disipativos en la hidrodinámica relativista. En este contexto, aparece la inquietud de estudiar la formación de estructuras estelares utilizando dos ecuaciones constitutivas, la propuesta por Eckart y la ecuación constitutiva GSG, obtenida de la teoría cinética. Considerando a las fluctuaciones de las variables utilizadas como elementos del formalismo hidrodinámico dentro de un marco fundamental estadístico, como entes que surgen espontáneamente y

están siempre presentes. Se considera entonces finalmente los puntos más importantes que se infieren de este trabajo:

1.- Al analizar el problema de la inestabilidad de Jeans en el marco de la formación de estructuras, el uso de la ecuación constitutiva para el flujo de calor obtenida fenomenológicamente y propuesta por Eckart, la cual incorpora a la aceleración hidrodinámica, nos lleva a resultados inconsistentes con los observados en la naturaleza. Estos resultados relegan al campo gravitacional, el cual deja de actuar como principal agente del proceso de la formación de estructuras estelares, introduciéndose tiempos muy cortos para la formación de estructuras que están muy alejados de los reportados hasta ahora. Por lo anterior se infiere que el uso de dicha ecuación constitutiva en las diferentes problemáticas, introduce patologías que nos hacen concluir que debe ser eliminada de los formalismos que se utilizan para la descripción de la dinámica de fluidos relativistas.

2.- El uso de la ecuación constitutiva GSG para el flujo de calor, expresada en términos de los gradientes a primer orden de las variables termodinámicas locales y construida a partir de la teoría cinética, permite eliminar las inconsistencias en el estudio de los picos del espectro de dispersión de Rayleigh-Brillouin [31], así como las inconsistencias cuando se le utiliza en el estudio de la inestabilidad de Jeans dentro de la dinámica de la formación de estructuras. Los resultados obtenidos muestran que el campo gravitacional vuelve a tomar su lugar, como principal agente en el inicio del proceso de la formación de estructuras (inestabilidad de Jeans). Además, el uso de esta ecuación permite encontrar expresiones corregidas perturbativamente al trabajar con fluidos viscosos y relativistas, respecto a las obtenidas por Jeans en 1902. Se muestra también que estas nuevas expresiones siempre nos llevan a los resultados clásicos cuando se ignoran los efectos viscosos y se alcanza el límite no relativista.

3.- Este último punto que considero es el más relevante, consiste en enfatizar la importancia que tiene el consolidar a la expresión para el flujo de calor en términos de los gradientes de primer orden, como la ecuación indicada para completar el sistema de ecuaciones de transporte que ayuda a describir la hidrodinámica relativista de un fluido monoatómico, abriendo un camino nuevo para abordar problemas de este tipo sin tener que recurrir a formalismos extendidos o similares a estos. Se plantea también la posibilidad de utilizar los efectos disipativos relativistas (relatividad especial) en un gas, en favor de la estabilidad y

eventualmente su confinamiento para el caso ionizado [28].

En el futuro inmediato se abordará este mismo problema, la inestabilidad de Jeans, recurriendo a las teorías de segundo orden [36] o a los formalismos extendidos que introducen una ecuación constitutiva para el flujo de calor de la forma [29]:

$$q^\nu + \tau \dot{q}^\nu = -\kappa h_\mu^\nu \left( T^{,\mu} + \frac{T}{c^2} \dot{u}^\mu \right) \quad (142)$$

con la intención de redondear el trabajo realizado hasta ahora, dejando el camino de los plasmas para un mediano plazo, ya que se muestra como un tema muy interesante.

## APÉNDICE

En este apéndice se muestra el desarrollo seguido para la obtención del número de onda de Jeans, considerando fluctuaciones en la temperatura. Para lo cual se partió de las ecuaciones de continuidad, conservación del momentum y conservación de energía ya linealizadas (usando  $n = n_0 + \delta n$ ,  $T = T_0 + \delta T$ ,  $\vec{u} = \delta \vec{u}$ ), y una fuerza externa por unidad de volumen ( $\rho \nabla (\delta \varphi)$ ) donde  $\rho = mn = mn_0 + m\delta n = \rho_0 + \delta \rho$  y  $\vec{g} = \vec{g}_0 + \delta \vec{g}$  dadas por :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta n) + n_0 \delta \theta = 0 \quad (143)$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\delta \theta) + \nabla^2 (\delta p) = \nabla^2 \delta \varphi \quad (144)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta T) + \frac{2}{3} T_0 (\delta \theta) = 0 \quad (145)$$

$$\nabla^2 \delta \varphi = 4\pi G \delta \rho. \quad (146)$$

en las ecuaciones anteriores  $n$  es el número de partículas por unidad de volumen, la divergencia de la velocidad hidrodinámica se define como  $\theta = \nabla \cdot \vec{u}$  y además, como  $p = nKT$  para un gas ideal, se tiene que:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial n} \nabla n + \frac{\partial p}{\partial T} \nabla T \quad (147)$$

por lo que linealizando y aplicando la divergencia se llega a:

$$\nabla^2 (\delta p) = \frac{\partial p}{\partial n} \nabla^2 (\delta n) + \frac{\partial p}{\partial T} \nabla^2 (\delta T). \quad (148)$$

Ahora bien, de (143)

$$-\frac{1}{n_0} \frac{\partial}{\partial t} (\delta n) = \delta \theta, \quad (149)$$

y de (145) se sabe que

$$-\frac{3}{2} \frac{1}{T_0} \frac{\partial}{\partial t} (\delta T) = \delta \theta, \quad (150)$$

por lo que igualando (149) y (150) se obtiene:

$$\frac{1}{n_0} \frac{\partial}{\partial t} (\delta n) = \frac{3}{2} \frac{1}{T_0} \frac{\partial}{\partial t} (\delta T), \quad (151)$$

y despejando  $\frac{\partial}{\partial t} (\delta T)$

$$\frac{2}{3} \frac{T_0}{n_0} \frac{\partial}{\partial t} (\delta n) = \frac{\partial}{\partial t} (\delta T). \quad (152)$$

Por otro lado si se sustituye (148) en (144) y dividiendo todo entre  $m$  se llega a:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\delta \theta) + \nabla^2 (\delta p) &= \nabla^2 (\delta \varphi), \\ \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\delta \theta) + \frac{\partial p}{\partial n} \nabla^2 (\delta n) + \frac{\partial p}{\partial T} \nabla^2 (\delta T) &= \nabla^2 (\delta \varphi) \\ n_0 \frac{\partial}{\partial t} (\delta \theta) + \frac{KT_0}{m} \nabla^2 (\delta n) + \frac{n_0 K}{m} \nabla^2 (\delta T) &= \nabla^2 (\delta \varphi). \end{aligned} \quad (153)$$

Derivando respecto a  $t$  y reacomodando se obtiene:

$$n_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\delta \theta) + \frac{KT_0}{m} \nabla^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} (\delta n) \right) + \frac{n_0 K}{m} \nabla^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} (\delta T) \right) = \nabla^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} (\delta \varphi) \right) \quad (154)$$

la cual, como  $-\frac{1}{n_0} \frac{\partial}{\partial t} (\delta n) = \delta \theta$ , se convierte en:

$$n_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( -\frac{1}{n_0} \frac{\partial}{\partial t} (\delta n) \right) + \frac{KT_0}{m} \nabla^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} (\delta n) \right) + \frac{n_0 K}{m} \nabla^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} (\delta T) \right) = \nabla^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} (\delta \varphi) \right) \quad (155)$$

y utilizando (152) se obtiene:

$$n_0 \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left( -\frac{1}{n_0} \delta n \right) + \frac{KT_0}{m} \nabla^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} (\delta n) \right) + \frac{n_0 K}{m} \nabla^2 \left( \frac{2}{3} \frac{T_0}{n_0} \frac{\partial}{\partial t} (\delta n) \right) = \nabla^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} (\delta \varphi) \right). \quad (156)$$

Ahora bien, utilizando el hecho de que  $\frac{\partial^3}{\partial t^3} y + \frac{\partial^2}{\partial t^2} y + \frac{\partial}{\partial t} y = 0$  se puede escribir como  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} y + \frac{\partial}{\partial t} y + y \right) = 0$ , se concluye que  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} y + \frac{\partial}{\partial t} y + y$  es constante. Entonces después de simplificar se obtiene finalmente:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta n) + \frac{5}{3} \frac{KT_0}{m} \nabla^2(\delta n) = 4\pi G(\delta n) \quad (157)$$

en donde (157) representa una ecuación de onda para la perturbación en la densidad  $\delta n$ , donde la velocidad de propagación de la onda está dada por:

$$C_s^2 = \frac{5}{3} \frac{KT_0}{m} \quad (158)$$

Este valor, difiere de  $C_T^2 = \frac{KT_0}{m}$  debido a la consideración de las perturbaciones en la temperatura del sistema. Cabe señalar que este valor para la velocidad del sonido, tampoco es completamente apropiado en el caso de temperaturas altas (relativistas) dado que el calor específico  $C_n$  no será  $\frac{3}{2}K$  (caso no relativista), sino que la energía interna estará dada por [23]:

$$\varepsilon = mc^2 \left[ \frac{K_3\left(\frac{1}{z}\right)}{K_2\left(\frac{1}{z}\right)} - \frac{KT}{mc^2} \right] = mc^2 \left[ \frac{K_3\left(\frac{1}{z}\right)}{K_2\left(\frac{1}{z}\right)} - z \right] \quad (159)$$

Como  $z = \frac{KT}{mc^2}$ ,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (160)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = K \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{K_3\left(\frac{1}{z}\right)}{K_2\left(\frac{1}{z}\right)} - z \right] \frac{\partial T}{\partial t} \quad (161)$$

entonces calculando la derivada que aparece en el primer término después de la igualdad se obtiene:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \left[ -1 + \frac{1}{2z^2} - \frac{K_1\left(\frac{1}{z}\right) K_3\left(\frac{1}{z}\right)}{2z^2 K_2\left(\frac{1}{z}\right)} - \frac{\left(K_1\left(\frac{1}{z}\right)\right)^2}{2z^2 \left(K_2\left(\frac{1}{z}\right)\right)^2} + \frac{K_4\left(\frac{1}{z}\right)}{2z^2 K_2\left(\frac{1}{z}\right)} \right] K \frac{\partial T}{\partial t} \quad (162)$$

de donde

$$C_n = \left[ -1 + \frac{1}{2z^2} - \frac{K_1\left(\frac{1}{z}\right) K_3\left(\frac{1}{z}\right)}{2z^2 K_2\left(\frac{1}{z}\right)} - \frac{\left(K_1\left(\frac{1}{z}\right)\right)^2}{2z^2 \left(K_2\left(\frac{1}{z}\right)\right)^2} + \frac{K_4\left(\frac{1}{z}\right)}{2z^2 K_2\left(\frac{1}{z}\right)} \right] K. \quad (163)$$

Expresando (162) como una serie, se tiene para el caso relativista:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = K \left[ \frac{3}{2} + \frac{15z}{4} - \frac{45z^2}{8} + \frac{135z^3}{32} - \dots \right] \frac{\partial T}{\partial t}$$

nótese que al considerar bajas temperaturas se recupera el resultado clásico:

$$\left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_n = C_n = \frac{3K}{2}. \quad (164)$$

Retomando la ecuación (158) tenemos que el número de onda de Jeans  $q_J$ , para el caso no relativista está dado por:

$$q_J^2 = \frac{4\pi G m n_0}{C_s^2} = \frac{12\pi G m^2 n_0}{5K} \left( \frac{1}{T_0} \right) \quad (165)$$

el cual tiende a valores pequeños para temperaturas altas, lo que indicaría que la longitud de Jeans ( $\lambda_J = \frac{2\pi}{q_J}$ ) crece proporcionalmente a  $\sqrt{T}$ .

Sin embargo si se considera el número de onda de Jeans tomando el valor completo de  $C_s^2$  (para un fluido relativista), la ecuación (165) se transforma en:

$$q_{Jr}^2 = \frac{4\pi G m n_0}{\left( \left[ -1 + \frac{1}{2z^2} - \frac{K_1(\frac{1}{z})K_3(\frac{1}{z})}{2z^2 K_2(\frac{1}{z})} - \frac{K_1(\frac{1}{z})^2}{2z^2 (K_2(\frac{1}{z}))^2} + \frac{K_4(\frac{1}{z})}{2z^2 K_2(\frac{1}{z})} \right]^{-1} + 1 \right) \frac{KT_0}{m}}$$

Al comparar los resultados con efecto relativista y sin él considerando los casos sin fluctuaciones en la temperatura y con fluctuaciones de ella, se obtiene el comportamiento mostrado en la figura 1, donde:

$$coc(z) = \frac{q_{Jr}^2}{q_J^2}.$$

Nótese que en el límite cuando  $z \rightarrow \infty$ , la curva tiende asintóticamente a:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{q_{Jr}^2}{k_J^2} = \frac{25}{12}$$

como se observa en la curva azul punteada de la figura 1.



C:/Users/humberto.mondragon/Desktop/MUY BUENAS/Imagen35.jpg

**Figura 1.** Se muestran como función de  $z$ : a) el cociente entre el número de onda de Jeans relativista y el número de onda de Jeans no relativista sin considerar fluctuaciones en la temperatura (curva punteada). b) el cociente entre el número de onda de Jeans relativista y el número de onda de Jeans no relativista, considerando las fluctuaciones en la temperatura (curva punto y guión) y c) el cociente del número de onda de Jeans relativista entre el mismo (línea continua) como referencia.

Se puede observar de la gráfica que la corrección al número de onda de Jeans considerando fluctuaciones en la temperatura no es una cantidad que impacte en sistemas astrofísicos conocidos. Si se toma el caso relativista para  $z \rightarrow \infty$ , al compararse con los casos no relativistas, la diferencia se mantiene constante, es decir se puede usar indistintamente cualquiera de los valores y no percibir resultados cualitativamente diferentes desde el punto de vista astrofísico.

## Referencias

---

- [1] Jeans, J.: Phil. Trans. Roy. Soc. 199 A, 49 (1902).
- [2] Jeans, J.: Astronomy and Cosmogony (1928), reprinted by Dover Publications, Inc., (1961).
- [3] Geller, M. J., Huchra, J. P.: Mapping the Universe, Science 17, Vol. 246, no 4932, pag 897-903, (1989).
- [4] Weinberg, S.: Astrophys. J. 168, 175-194, (1971).
- [5] Corona-Galindo, M. G. and Dehnen, H.: Astrophysics and Space Science, 153: 87-94, (1989).
- [6] Sandoval-Villalbazo, A. and Garcia-Colin, L.S.: Clas. Quan. Grav. 19, 2171, (2002).
- [7] Eckart, C.: Phys. Rev. 58, 267; ibid 58, 919, (1940).
- [8] Landau, L. and Lifshitz, E. M.: "Fluid Mechanics", Addison Wesley, Reading Mass, (1958).
- [9] Hiscock, W. A. and Lindblom, L.: Phys. Rev. D 31, 725, (1985).
- [10] Jou, D., Casas-Vázquez, J., Lebon, G.: "Extended Irreversible Thermodynamics", fourth edition, Ed. Springer-Verlag GmbH. (2009).
- [11] Israel W. and Stewart, J. M.: Ann. Phys. 118, 341, New York (1979).
- [12] Garcia-Perciante, A.L. Garcia-Colin, L.S, Sandoval-Villalbazo, A.: Physic A 388, 3765-3770 (2009).
- [13] de Groot, S.R., van Leeuwen, W. A., van der Weert, Ch.: Relativistic Kinetic Theory. North Holland, Amsterdam (1980).
- [14] Israel W.: J. Math. Phys. 4, 1163, (1963).
- [15] Tang, C. L.: Fundamentals of Quantum Mechanics, for solid state electronics and optics. Cap. 5, pp 80: Cambridge University Press. (2005).
- [16] Dakel, A., Ostriker, J. P.: "Formation of structure in the universe". Cambridge University Press, (1999).
- [17] Kolb, E.W., Turner, M.S.: The Early Universe. chapter IX pp 342-351, Addison-Wesley, USA ( 1990).
- [18] García-Colin, L. S.: Termodinámica de los Procesos Irreversibles (UAM-Iztapalapa, México D. F. 1990).
- [19] Leopólido García-Colín Scherer, Patricia Goldstein Menache: La Física de los Procesos Irrever-

- sibles, Tomo 1. Colegio Nacional, (2003).
- [20] Berne B. J. and Pecora, R.: *Dynamic Light Scattering*, John Wiley and Sons, New York, (capítulo 10), (2001).
- [21] Mountain, R.: *Rev. Mod. Phys.* 38, 205 (1996).
- [22] Chapman, S. Cowling T. G.: "The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases", third edition, Cambridge University Press, (1970).
- [23] Cercignani, C. and G. Medeiros Kremer: "The Relativistic Boltzmann Equation": Theory and Applications, Cambridge University Press 3rd Ed., UK (1991).; Birkäuser, Berlin (2002).
- [24] Kay, David C.: "Cálculo Tensorial": Serie Schaum, Mc Graw Hill, (1990).
- [25] Garcia-Perciante, A.L., Mendez, A. R.: *Gen. Relativ. Gravit.* 43, 2257-2275 (2011).
- [26] Sandoval-Villalbaz, A., Garcia-Perciante, A.L., Garcia-Colin, L.S.: The heat flux from a relativistic kinetic equation with a simplified collision kernel: physics and mathematics of gravitation: Proceedings of the Spanish Relativity Meeting 2008. AIP Conference Proceedings, Volume 1122, pp. 388-391 (2009).
- [27] Brun-Battistini, D., Sandoval-Villalbaz, A.: AIP Conference Proceedings, vol. 1312, pp 57-63 (2010).
- [28] Liboff, Richard. L.: "Kinetic Theory: Classical, Quantum and Relativistic Descriptions. 2 Ed., John Wiley & Sons Inc. New York (1998).
- [29] D. Jou, J. Casas-Vázquez and G. Lebon: *Extended Irreversible Thermodynamics*, 2nd Ed. Springer (1996).
- [30] Garcia-Perciante, A.L., Garcia-Colin, L.S., and Sandoval-Villalbaz, A.: *Gen. Relativ. Gravit.* 41, 1645-1654 (2009).
- [31] Garcia-Perciante, A.L., Garcia-Colin, L.S., and Sandoval-Villalbaz, A.: *Phys. Rev. E* 79, 066310-066315 (2009).
- [32] Sandoval-Villalbaz, A. and Garcia-Colin, L.S.: *Revista Mexicana de Física S* 53 (4) 148-149, (2006).
- [33] Harwitt, M.: *Astrophysical Concepts*, 4th ed. Springer, New York (2006).
- [34] Tsumura, K., Kunihiro, T.: *Phys. Lett. B* 668, 425 (2008).
- [35] Minami, Y., Kunihiro, T.: *Prog. Theor. Phys.* 122, 881 (2010).
- [36] Lopez-Monsalvo, C. S., Andersson, N.: *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 467, 738 (2010). [Arxiv: 1006.2978].

- [37] Mondragon-Suarez, J. H., Sandoval-Villalbaz, A.: *Gen. Relativ. Gravit.* 44, 139-145 (2012).
- [38] García-Colin, L. S. , Garcia-Perciante, A.L. and Sandoval-Villalbaz, A.: *Phys. Plasmas* 14, 012305 (2007).
- [39] Pu, S., Koide, T., Rischke, D. H.: *Phys. Rev. D* 81, 114039 (2010).