

UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA

Estudios con Reconocimiento de Validez Oficial por Decreto Presidencial
Del 3 de abril de 1981



LA VERDAD
NOS HARÁ LIBRES

**UNIVERSIDAD
IBEROAMERICANA**

CIUDAD DE MÉXICO ®

**“PRESERVACIÓN DE SINCRONIZACIÓN EN SISTEMAS
DINÁMICOS FRACCIONARIOS”**

TESIS

Que para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

Presenta

ARMANDO FABIÁN LUGO PEÑALOZA

Director: Dr. Guillermo Fernández Anaya

Codirector: Dr. José Job Flores Godoy

Lectores: Dr. Rafael Martínez Guerra

Dr. Rafael Martínez Martínez

México, D.F.

2016

Dedicatoria

A mis padres: Marcelino Gerardo Lugo Saavedra(†) y
Virginia Peñaloza Gómez

A mis hermanas y mi hermano: Anatalia, Rosario Guadalupe, y Gerardo

A mis sobrinos: Gerardo, Josué Armando, Karla Guadalupe, Jesús Yevyeni, María Ylena
y Jesús Zadkiel

A mi esposa amada: Elizabeth López Rivera

Agradecimientos

A mi hermano Gerardo, y mis hermanas, Anatalia y Rosario Guadalupe, por todo su apoyo incondicional, su cariño y sus sabios consejos.

A mi papá, Marcelino Gerardo Lugo Saavedra (descanse en paz), por haberme inculcado interés por la ingeniería y la ciencia, además de todo su apoyo en mi formación y el cariño que me brindó. Y a mi mamá, Virginia Peñaloza Gómez, por ayudarme a esforzarme por ser mejor, que también influyó en mi formación y por darme su amor y compartirme sus creencias.

A mi esposa, Elizabeth López Rivera, que me ha apoyado y me alienta a seguirme superando y por ser mi compañera de vida (además de mi médico favorita).

A mi director y codirector de tesis, respectivamente: Dr. Guillermo Fernández Anaya y Dr. José Job Flores Godoy, por todo su apoyo y comprensión.

A mis lectores de tesis: Dr. Rafael Martínez Martínez, Dr. Rafael Martínez Guerra, Dr. Salvador Carrillo Moreno, por sus valiosos comentarios que apoyaron en la mejora de este trabajo.

A la Universidad Iberoamericana y a la asociación Fomento de Investigación y Cultura Superior, A. C. (FICSAC) por otorgarme una beca, sin la cual no hubiese sido posible este trabajo.

A toda mi familia y amigos que han creído en mí y me han apoyado.

Índice general

| | |
|--|----------|
| Índice de cuadros | III |
| Índice de figuras | IV |
| Objetivos | V |
| Resumen | VI |
| Abstract | VII |
| Notación | VIII |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Introducción y Motivación | 1 |
| 1.1.1. Cálculo Fraccionario | 2 |
| 1.1.2. Sincronización | 2 |
| 1.1.3. Preservación de pasividad, estabilidad y sincronización en sistemas de orden entero | 3 |
| 1.2. Estado del arte | 4 |
| 1.2.1. Sobre Sincronización de Sistemas Fraccionarios | 4 |
| 1.2.2. Ejemplo de aplicaciones del Cálculo Fraccionario | 4 |
| 1.3. Formulación del problema de preservación en Sistemas Fraccionarios | 5 |
| 1.3.1. Preservación de estabilidad y sincronización en sistemas no lineales de orden fraccionario | 5 |
| 1.3.2. Estabilización y pasificación mediante preservación en sistemas li- neales de orden fraccionario distribuido | 6 |
| 1.4. Preliminares básicos | 7 |
| 1.4.1. Derivada fraccionaria de Caputo | 7 |
| 1.4.2. Estabilidad de sistemas de orden fraccionario | 9 |
| 1.4.3. Métodos numéricos para simular sistemas fraccionarios | 12 |

| | |
|---|-----------|
| 2. Preservación en Sistemas Fraccionarios | 13 |
| 2.1. Introducción | 13 |
| 2.2. Condiciones para Preservación de Estabilidad en FOS | 14 |
| 2.3. Condiciones para Preservación de Sincronización en FOS | 17 |
| 2.3.1. Preservación de la estabilización de sistemas autónomos no lineales de orden fraccionario conmensurable | 17 |
| 2.3.2. Preservación de sincronización práctica de sistemas autónomos no lineales de orden fraccionario conmensurable | 17 |
| 2.4. Estabilización y pasificación de DOLTIS usando métodos de preservación . | 19 |
| 2.4.1. Resultados previos | 20 |
| 2.4.2. Resultados de Estabilización y pasificación de DOLTIS usando métodos de preservación | 28 |
| 3. Aplicación de los criterios de Preservación | 35 |
| 3.1. Ejemplos de preservación de estabilización y sincronización de FOS no lineales | 35 |
| 3.1.1. Preservación de estabilización de sistemas fraccionarios de Lorenz . | 35 |
| 3.1.2. Preservación de sincronización práctica para sistemas fraccionarios de Chen | 37 |
| 3.2. Estabilización de DOLTIS usando métodos de preservación | 39 |
| 3.2.1. Ejemplo 1 | 40 |
| 3.2.2. Ejemplo 2 | 41 |
| 4. Conclusiones | 46 |
| A. Artículos y Congresos | 47 |
| Bibliografía | 48 |

Índice de cuadros

| | |
|---|----|
| 1.1. Aproximaciones de operadores fraccionarios con un error de aproximadamente 2 dB de $\omega = 10^{-2}$ a 10^2 rad/s | 12 |
|---|----|

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| 3.1. Gráfica de los estados vs tiempo | 36 |
| 3.2. <i>Plano fase</i> de los sistemas original y modificado | 37 |
| 3.3. Gráfica de errores de sincronización con la ley de control activada a los $t = 25s$ | 38 |
| 3.4. <i>Plano fase</i> de la sincronización de los sistemas originales y modificados; los sistemas maestros aparecen en azul, y los sistemas esclavos en negro, la ley de control es aplicada a los $t = 50s$ | 39 |
| 3.5. Gráfica de $a_{\Pi}(x)$ y $\Delta_{\Pi}(x)$ | 45 |

Objetivos

Objetivo General

Desarrollar resultados para la preservación de estabilización, pasificación y sincronización para algunas clases de sistemas dinámicos fraccionarios.

Objetivos Específicos

- Estudiar características de los sistemas dinámicos fraccionarios.
- Desarrollo de una metodología para la preservación de estabilización, y sincronización de sistemas dinámicos fraccionarios.
- Desarrollo de un resultado analítico para garantizar la preservación de estabilización y pasificación de sistemas de orden fraccionario distribuido.
- Ilustrar mediante ejemplos la aplicación de las metodologías desarrolladas para la preservación de estabilización (y/o pasificación) y sincronización para una clase de sistemas dinámicos de orden fraccionario.

Resumen

La sincronización que se analiza en este trabajo es aquella en la que se define un error de sincronización entre la salida de un sistema fraccionario maestro y varios otros sistema fraccionarios esclavos, entonces la sincronización se logra al estabilizar la solución en el origen del sistema fraccionario del error de sincronización. Es por esto que la preservación de sincronización está fuertemente ligada a la preservación de estabilización y, por ende, al concepto de pasividad.

El tema de la estabilidad de sistemas de orden fraccionario ha sido estudiado por varios autores [88, 65, 54, 109], poniendo énfasis sobre distintos tipos de sistemas y distintas metodologías de análisis. En este trabajo no estamos interesados en desarrollar un nuevo criterio de estabilidad, sino criterios sobre las modificaciones que pueden tener los sistemas, de tal modo que si originalmente estaban estabilizados (sincronizados), entonces permanezcan así después de la modificación, *preservando* la estructura del control. Además, se extienden resultados de estabilización y pasificación de sistemas orden entero a una clase de sistemas de orden fraccionario, *preservando* también la estructura del control.

La aportación de este trabajo en forma simple consiste entonces en lo siguiente:

- Desarrollo de resultados analíticos para la preservación de la estructura de la entrada de control en la estabilización y sincronización de una clase de sistemas fraccionarios, ante modificaciones.
- Extender resultados de estabilidad y pasividad de Sistemas Lineales Autónomos a una familia más general de sistemas fraccionarios, preservando la estructura del control.

Abstract

The synchronization problem treated in this document is the one where several synchronization errors are defined between the output of a *master* systems and each of the outputs of several *slave* systems, then in such arrangement of systems the synchronization is achieved through the stabilization of the solution in the origin of the dynamical system of each synchronization error. This is why preservation of synchronization is strongly related to the preservation of stabilization and therefore to the concept of passivity.

The stability of fractional order systems has been a subject studied by several authors [88, 65, 54, 109], making emphasis on the different kinds of systems and the various types of approaches for their analysis. In the present work, we are not interested on developing a new stability criterion, but to find criteria for the preservation of the structure of the control input; that is, when a system was stabilized (synchronized) and suffers a modification we want to know about conditions on the modification in such a way that we assure that the modified system is stabilized (synchronized) by a control input with the same structure. Furthermore, stabilization and passivation results for integer order systems are extended to a class of fractional order systems preserving the structure of the input control.

The main contribution of the present work can be expressed in the following way:

- Development of analytic results for the preservation of the input control structure in synchronization and stabilization in a class of fractional systems, in the presence of system modifications.
- Extension of analytic results for the stability and passivity of LTI systems to a more general family of fractional systems, preserving the structure of the control input.

Notación

| | |
|------------------------|---|
| \mathbb{N} | Números naturales. |
| \mathbb{N}_0 | Números naturales unión el cero. |
| \mathbb{Z}_0^- | Números enteros negativos unión el cero. |
| \mathbb{R} | Campo de los números reales. |
| \mathbb{R}^+ | Números reales positivos. |
| \mathbb{C} | Campo de los números complejos. |
| $\operatorname{Re}(z)$ | Parte real del número complejo z . |
| \subset | Subconjunto propio. |
| $[a, b]$ | Números reales t tales que $a \leq t \leq b$. |
| ${}_a^c D_t^\alpha f$ | Derivada fraccionaria de Caputo de la función f . |
| $f^{(n)}$ | Derivada n –ésima de la función f en el sentido usual, $n \in \mathbb{N}$. |

En la sección 1.1 se mencionan las nociones básicas necesarias para la comprensión del presente escrito, además que se intenta indicarle al lector la importancia del tema. En 1.2 se presenta brevemente una revisión de trabajos relacionados con la sincronización y estabilidad en sistemas fraccionarios. En la sección 1.3 se especifica el problema a abordar y finalmente en 1.4 se presentan los preliminares básicos que se usan para el desarrollo de los resultados principales.

1.1. Introducción y Motivación

El Control Automático es una ciencia que se dedica a estudiar propiedades cualitativas de los modelos de ciertos sistemas que pueden ser físicos, y la forma en la que dichos sistemas pueden ser *estimados* para que reflejen un *comportamiento* al menos cercano a lo que se desea.

En ese sentido se han desarrollado varias técnicas útiles para garantizar que el control funcione, y aún más, en algunos casos también se requiere que el control siga funcionando a pesar de perturbaciones externas al sistema modelado en cuestión.

El cálculo fraccionario es una herramienta alternativa al cálculo de orden entero, para el cual ya hay bastantes desarrollos. En ese sentido varias herramientas para el control de sistemas de orden fraccionario aún están en desarrollo y es justo en ese punto donde deseamos contribuir con el presente trabajo.

En el desarrollo de éste tema de tesis, se intenta primero extender los resultados de preservación de estabilidad, pasividad y sincronización dados para orden entero al caso de una clase de sistemas de orden fraccionario. Una vez desarrollados, los resultados de preservación de estabilidad para una clase de sistemas orden fraccionario, serán utilizados para preservar la estabilización, pasificación y/o sincronización de algunos sistemas dinámicos de orden fraccionario, lineales y no lineales.

A continuación nos referimos a tres de los temas centrales de este trabajo: cálculo fraccionario, sincronización y preservación.

1.1.1. Cálculo Fraccionario

Varios autores han abundado sobre la importancia del Cálculo Fraccionario y su desarrollo desde los tiempos de L'Hospital y Leibnitz [41], [18], aún cuando el mayor auge en el uso del cálculo fraccionario para describir sistemas físicos es de hace apenas algunas décadas. Cabe resaltar que un nombre más apropiado sería cálculo de orden arbitrario, ya que no es sólo el cálculo de integración y derivación cuyo orden puede estar expresado en fracciones, sino puede ser cualquier número real.

Algunas propiedades interesantes que se han encontrado al utilizar cálculo fraccionario para describir sistemas físicos, son las llamadas propiedades hereditarias y de memoria larga, que no se obtienen al utilizar operadores de orden entero [83]. Estas propiedades están directamente relacionadas con la estructura de las condiciones iniciales al utilizar operadores fraccionarios [19].

Existen varias definiciones de derivada e integral fraccionaria, algunas de éstas son: definición de Riemann-Liouville, Grunwald-Letnikov, M. Caputo, K. S. Miller-B. Ross, Oldham-Spanier, Kolwankar-Gangal, entre otras. Se usan en este documento la derivada fraccionaria de Caputo y la derivada fraccionaria de orden distribuido de Caputo.

Las aplicaciones del cálculo fraccionario a la ciencia y la ingeniería han crecido en las últimas décadas [41], esto se debe en parte a las propiedades de dichos operadores. Específicamente, las aplicaciones que involucran sistemas fraccionarios caóticos han sido uno de los temas principales de investigación, en este campo, algunos de los trabajos son [57, 52, 51, 38, 40]. También hay varios trabajos sobre redes complejas de orden entero y fraccionario, por ejemplo [55, 56, 114, 58].

1.1.2. Sincronización

Sincronización es una palabra que se utiliza coloquialmente para indicar que algo sucede al mismo tiempo en forma semejante; e. g., *nado sincronizado*. En general, se ha estudiado que la sincronización surge en diversas áreas tradicionales del conocimiento (sociología, economía, biología, bioquímica, entre otras), así como en áreas de la ingeniería (redes de comunicación, acoplamiento de láser); por lo que es importante estudiar este *fenómeno* [82, 107, 72, 105].

En particular, en este trabajo el interés se centra en esquemas de sincronización maestro-esclavo, en los que los sistemas a ser sincronizados están representados mediante un modelo dinámico con derivadas fraccionarias. Puesto que esquemas semejantes han sido ya desarrollados para el caso de orden entero. En este documento el problema de preservación de sincronización se reduce a un problema de preservación de estabilización del sistema dinámico del error de sincronización.

Hay varios trabajos sobre la sincronización de sistemas fraccionarios autónomos que

pueden ser descritos como un sistema con una parte lineal y una parte no lineal [95, 80, 103, 59], en tales trabajos se proponen varios esquemas para asegurar que la dinámica del error satisface ciertas condiciones que lo llevan a la estabilidad, para orden fraccionario entre 0 y 1 [65], esto significa que la dinámica del error debe cumplir una relación lineal para que se pueda obtener su sincronización. También está el esquema propuesto en [63], basado en [109], donde el sistema dinámico del error puede ser no lineal, lo cual puede ser visto como una cuestión importante desde el punto de vista analítico, ya que no se restringe a que el error sea solamente lineal.

1.1.3. Preservación de pasividad, estabilidad y sincronización en sistemas de orden entero

En los sistemas de orden entero se han realizado varios trabajos sobre el estudio de la preservación de estabilidad y pasividad de distintos tipos de sistemas dinámicos, en algunas ocasiones para garantizar la sincronización. Por ejemplo en [27] se presenta, en forma de una proposición, una metodología para garantizar la preservación de la estabilidad del sistema dinámico del error de sincronización utilizando una extensión del método indirecto de Lyapunov.

Específicamente, en [27] los autores desarrollaron dos resultados para la preservación de estabilidad de sistemas no lineales de orden entero; uno de éstos resultados da condiciones para la preservación de estabilidad entre sistemas de distinto orden en el vector de estados. El otro resultado proporciona una mayor visión sobre el tipo de transformaciones que podrían preservar la estabilidad, pero es más restrictivo, puesto que como parte de su hipótesis se pide la diagonalizabilidad de la parte lineal del sistemas analizados.

Posteriormente, en [32, 5] se presentan extensiones del teorema de la variedad diferenciable y el teorema de la variedad central en términos del producto Kronecker, para puntualizar que es posible la preservación de estabilidad bajo cierto tipo de transformaciones, que representan los posibles cambios en los parámetros del sistema dinámico del error. Además se presentan ciertas transformaciones lineales, aplicables sobre la parte lineal del sistema dinámico no lineal, que preservan la estabilidad y la sincronización.

En [5] además obtuvieron condiciones para garantizar la preservación de la estabilidad para sistemas de orden entero en la presencia de modificaciones no lineales en la matriz Jacobiana, tales modificaciones pueden ser aplicadas sobre el polinomio característico o en forma de una evaluación matricial polinomial no lineal.

Este tema resulta de importancia puesto que tales modificaciones pueden ser interpretadas como perturbaciones sobre el sistema. Note que la modificación de la parte lineal del campo vectorial asociado con la ecuación diferencial fraccionaria modifica algunas propiedades locales del campo vectorial en el punto de equilibrio; en particular, modifica

la estabilidad local.

1.2. Estado del arte

Hasta donde sabemos, no se han desarrollado trabajos sobre la *preservación de sincronización de sistemas dinámicos de orden fraccionario*. Por esta razón, se mencionan algunos de los trabajos que consideramos más *significativos* (por el desarrollo realizado, o por la forma resumida en que presentan varios resultados anteriores) que han sido desarrollados sobre la sincronización de sistemas dinámicos fraccionarios y aplicaciones del cálculo fraccionario.

1.2.1. Sobre Sincronización de Sistemas Fraccionarios

En 1995 en [40], se consideró una versión modificada de un circuito eléctrico caótico de Chua, considerando derivadas de orden fraccionario para verificar en forma analítica y mediante simulaciones el orden en el cual se encontraba al comportamiento caótico. Se determinó que el mínimo orden para encontrar un comportamiento caótico en el sistema de Chua de orden fraccionario, era de 2.7. En este artículo se utilizaron las aproximaciones de operadores de orden fraccionario presentadas en [15].

En [102] (junio,2008) se estudia el comportamiento caótico de un sistema lineal autónomo logístico de orden fraccionario. En este tipo de sistema, se encontraron comportamientos caóticos para sistemas de orden menor a 3. Además se presenta un ejemplo de sincronización para este tipo de sistemas.

En [106] (2008), se estudia a un sistema de orden fraccionario, que generaliza a los sistemas caóticos de Lorenz, Lü y Chen. Tal sistema es conocido como sistema caótico de orden fraccionario unificado. Además se estudia un esquema de sincronización con un acoplamiento uni-direccional, tomando la transformada de Laplace de los sistemas maestro y esclavo. Finalmente, se determinó que el orden mínimo para encontrar comportamientos caóticos en este tipo de sistemas es de 2.76.

De 2000 a 2010, se realizaron varios otros trabajos sobre la sincronización de sistemas de orden fraccionario, algunos de ellos son: [2, 67, 108, 48, 36, 77, 52].

Algunos otros trabajos relativos a sincronización se han desarrollado de 2011 a la fecha, entre ellos los artículos de [43, 1, 110, 9, 23]; y en 2015 un libro [86].

1.2.2. Ejemplo de aplicaciones del Cálculo Fraccionario

Las aplicaciones del cálculo fraccionario se pueden encontrar en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería [41], esto se debe en parte a las propiedades de los operadores fraccionarios. Entre los libros que mencionan algunas aplicaciones se encuentran [41, 83,

18, 71]. Además, otro tipo de aplicaciones son como en [71], que se presenta un ejemplo de un sistema mecatrónico de servomotores con lazos de control de velocidad y posición.

En éstos libros se ilustra la tendencia en aplicaciones para el modelado, la identificación y el control de sistemas físicos descritos con operadores fraccionarios. En particular, en [71] se hace la siguiente observación: “De los sistemas de orden entero sabe que los efectos positivos de la acción derivativa (estabilidad relativa incrementada) se pueden observar del análisis en frecuencia por la introducción de un *adelanto* por $\pi/2$, y los efectos negativos (sensibilidad incrementada a ruido de alta frecuencia) por el incremento en la ganancia con pendiente de $20dB$. Para una acción integral, los efectos positivos pueden ser deducidos por la ganancia infinita a frecuencia cero, y los negativos por el *atraso en fase* introducido. Considerando esto, resulta natural considerar que al introducir más acciones de control generales de la forma $s^2, 1/s^n, n \in \mathbb{R}^+$, se podrían alcanzar compromisos mejores entre los efectos positivo y negativo”.

Otras aplicaciones son las relacionadas con el estudio de sistemas caóticos fraccionarios o su sincronización, algunos de éstos trabajos son [57, 52, 51, 38, 40]. Además hay algunos otros que se dedican a estudiar la sincronización de redes complejas, por ejemplo [55, 56, 114, 58]. Específicamente, hay varios trabajos que se dedican a estudiar la sincronización de sistemas fraccionarios autónomos de la forma $x^{(\alpha)} = Ax + g(x)$ ([95, 80, 103, 59]), en tales trabajos se proponen diferentes teoremas para asegurar que el sistema cumple las condiciones del celebrado teorema de Matignon [65] para sistemas del tipo $x^{(\alpha)} = Ax$ con orden fraccionario entre 0 y 1, esto significa que el error de sincronización está restringido a sólo tener parte lineal. Existe además otro esquema para la sincronización, propuesto en [63], basado en un teorema de estabilidad de la solución en el origen para sistemas del tipo $x^{(\alpha)} = Ax + g(x)$ ([109]), donde se permite que el sistema fraccionario del error de sincronización tenga también parte no lineal.

1.3. Formulación del problema de preservación en Sistemas Fraccionarios

1.3.1. Preservación de estabilidad y sincronización en sistemas no lineales de orden fraccionario

Este problema puede ser descrito de la siguiente forma: si se tiene un sistema fraccionario original de la forma

$$x^{(\alpha)} = Ax + g(t, x) \tag{1.1}$$

donde Ax es la parte lineal y $g(t, x)$ es la parte no lineal cuya solución en el origen es estable, queremos conocer cuál será la estructura de aquellas modificaciones que puedan

1.3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE PRESERVACIÓN EN SISTEMAS FRACCIONARIOS

sucedier al sistema original de tal forma que el origen del sistema fraccionario modificado también sea estable. Este tema resulta importante, puesto que tales modificaciones pueden ser interpretadas como perturbaciones al sistema original. Nótese que la modificación de la parte lineal del campo vectorial asociado con la ecuación diferencial fraccionaria modifica algunas propiedades del campo vectorial en el punto de equilibrio, específicamente, modifica la estabilidad local. En [27] los autores desarrollaron dos resultados para la preservación de estabilidad de sistemas no lineales de orden entero; uno de éstos resultados da condiciones para la preservación de estabilidad entre sistemas con diferente configuración del vector de estados, pero no da información directa sobre las transformaciones que están ocurriendo, el otro resultado da más información, pero es más restrictivo, puesto que parte de su hipótesis es la diagonalizabilidad de la parte lineal del sistema. En [5] los autores obtuvieron condiciones para la preservación de estabilidad de sistemas de orden entero en presencia de modificaciones no lineales a la matriz Jacobiana, tales modificaciones pueden ser aplicadas sobre la ecuación característica polinomial o en la forma de una evaluación polinomial de matriz no lineal.

Utilizando el método establecido en [109] se puede garantizar la sincronización práctica de sistemas caóticos, al garantizar la estabilidad del punto de equilibrio en el origen, del sistema dinámico caótico del error, como se muestra en [63].

1.3.2. Estabilización y pasificación mediante preservación en sistemas lineales de orden fraccionario distribuido

En el problema anterior se dan condiciones sobre las modificaciones que pueden suscitarse en un sistema no lineal de orden fraccionario, de tal forma que con la misma estructura del control u (específicamente preservando la estructura de las ganancias K), que estabiliza (o sincroniza) al sistema original fraccionario, se pueda estabilizar (o sincronizar) al sistema modificado.

En este problema se toma un enfoque distinto: se observa a un sistema lineal de orden entero y a un sistema lineal de orden fraccionario distribuido (DOLTIS) con estructuras semejantes, luego se enuncian condiciones bajo las cuales la estructura del control que estabiliza (o pasifica) al sistema de orden entero puede ser preservada (i. e., que se puede usar una estructura con las mismas ganancias K) para estabilizar (o pasificar) al DOLTIS semejante.

Se pretenden utilizar los resultados para sistemas de orden entero dados en [27, 32, 5], en una forma extendida para sistemas de orden fraccionario.

donde $f^{(n)}(\tau)$ es la derivada n -ésima de $f(\tau)$ en el sentido usual y $n \in \mathbb{N}$. □

De las definiciones anteriores, cuando f sea derivable n -veces, se tiene:

$${}^c D_t^\alpha f(t) = {}_a I_t^{n-\alpha} \frac{d^n f(t)}{dt^n}. \quad (1.3)$$

Se tomará el límite inferior de integración $a = 0$, pues, como se mencionó antes, en este trabajo se trata con sistemas que evolucionan en el tiempo. Al igual que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, la derivada fraccionaria de Caputo está en términos de una derivada de orden entero, además de una integral fraccionaria, esto último tiene como consecuencia que la derivada fraccionaria tenga límites de derivación lo cual es totalmente diferente a lo conocido de la derivada usual. Este operador tiene las siguientes propiedades:

1. $\lim_{\alpha \rightarrow (n-1)^+} {}^c D_t^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0)$ y también $\lim_{\alpha \rightarrow (n)^-} {}^c D_t^\alpha f(t) = f^{(n)}(t)$.
2. Si $f(t) = k$, con k una constante, entonces ${}^c D_t^\alpha f(t) = 0$.¹
3. ${}^c D_t^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}^c D_t^\alpha f(t) + \mu {}^c D_t^\alpha g(t)$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
4. $\mathcal{L}\{{}^c D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0)$,² con $n-1 < \alpha \leq n$ y $n \in \mathbb{N}$.
5. Si $x \in C^n[0, T]$ para $T > 0$, entonces ${}^c D_t^\alpha f(0) = 0$.

La propiedad 4 muestra lo comentado con anterioridad, las condiciones iniciales aparecen como en la derivada usual, mientras que con la definición de Riemann-Liouville esto no ocurre, también obsérvese el resultado de derivar una constante con la definición de Riemann-Liouville y la definición de Caputo.

Una instancia de esta clase de derivadas fraccionarias de orden variable esta constituida por las derivadas de orden distribuido, concepto iniciado por Caputo [?] y después desarrollado por el mismo Caputo en [12, 13]. Recientemente el estudio de sistemas de orden distribuido ha ganado interés en varias áreas del conocimiento; por ejemplo, en [33] los autores discuten la existencia y unicidad de soluciones y proponen un método numérico para su aproximación, en [68] se dan soluciones fuertes explícitas y análogos estocásticos para las ecuaciones de difusión de orden distribuido en dominios acotados, y en [53] se presenta una técnica para la discretización del operador de integración/diferenciación de orden distribuido de Caputo.

Definición 1.2 [75]

¹Con la de definición de Riemann-Liouville esto no ocurre.

² $\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt$.

1. INTRODUCCIÓN

a). La derivada fraccionaria de orden distribuido en el sentido de Caputo respecto a una función de densidad de orden $b(\alpha) \geq 0$ es:

$$D_t^{b(\alpha)}y(t) = \int_{m-1}^m b(\alpha)y^{(\alpha)}(t)d\alpha,$$

b). La transformada de Laplace del operador fraccionario distribuido de Caputo satisface

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D_t^{b(\alpha)}y(t)\} &= \int_{m-1}^m b(\alpha) \left[s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-1-k} y^{(k)}(0^+) \right] d\alpha \\ &= \hat{B}(s)Y(s) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{s^{k+1}} \hat{B}(s)y^{(k)}(0^+), \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde

$$\hat{B}(s) = \int_{m-1}^m b(\alpha)s^\alpha d\alpha,$$

sin pérdida de generalidad se asume que $m = 1$.

1.4.2. Estabilidad de sistemas de orden fraccionario

Entre los más importantes tipos de estabilidad para sistemas de orden fraccionario se encuentran: la estabilidad de Mittag-Leffler [54] y la estabilidad en el sentido de Lyapunov, que ha sido extendida en [65] para sistemas fraccionarios lineales.

Sea un sistema lineal autónomo de orden fraccionario con representación en espacio de estados

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

donde $A \in R^{M \times M}$, $B \in R^{M \times 1}$, y $C \in R^{1 \times M}$.

Definición 1.3 [65] *El sistema lineal autónomo homogéneo de orden fraccionario asociado a (1.5) descrito por*

$$D^\alpha x(t) = Ax(t), \text{ con } x(0) = x_0 \quad (1.6)$$

se dice

a). estable ssi $\forall x_0 \exists A$ tal que, $\forall t \geq 0$, $\|x(t)\| \leq A$

b). asintóticamente estable si y sólo si es estable y $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$

El siguiente teorema es válido para $0 < \alpha < 1$, y nos da condiciones suficientes y necesarias para asegurar la estabilidad de un sistema lineal autónomo fraccionario:

Teorema 1.1 *El sistema autónomo homogéneo*

$$D^\alpha x(t) = Ax(t), \text{ con } x(t_0) = x_0 \text{ y } 0 < \alpha < 1, \quad (1.7)$$

se dice

- a). *asintóticamente estable si y solo si $|\arg(\text{spec}(A))| > \alpha\frac{\pi}{2}$, donde $\text{spec}(A)$ es el espectro (conjunto de eigenvalores) de A . Además el vector de estados $x(t)$ decae hacia 0 y cumple la siguiente condición: $\|x(t)\| < Nt^{-\alpha}$, $t > 0$, $\alpha > 0$.*
- b). *estable si es asintóticamente estable, o aquellos eigenvalores críticos, que satisfacen $|\arg(\text{spec}(A))| = \alpha\frac{\pi}{2}$ tienen multiplicidad geométrica igual a uno.*

En [65, 66] se hace referencia a los argumentos para verificar que la estabilidad asintótica (interna) de éstos sistemas implica la *estabilidad BIBO (externa)*.

Para $1 < \alpha < 2$ se tiene un resultado semejante [113]

Teorema 1.2 *El sistema diferencial autónomo fraccionario*

$$x^{(\alpha)} = Ax, \quad t > t_0, \quad (1.8)$$

con condiciones iniciales $x^{(k)}(t_0) = x_k$, ($k = 0, 1$), con la derivada de Caputo y donde $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es asintóticamente estable si y sólo si $|\arg(\text{spec}(A))| > \alpha\pi/2$. En este caso, los componentes del estado decaen a 0 como $t^{-\alpha-1}$. Más aún, el sistema (1.8) es estable si y sólo si es asintóticamente estable o aquellos valores característicos que satisfacen $|\arg(\text{spec}(A))| = \alpha\pi/2$ tienen las mismas multiplicidades algebraicas y geométricas.

Se considera el sistema fraccional no autónomo con el operador de Caputo o de Riemann-Liouville

$${}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = f(t, x) \quad (1.9)$$

con condición inicial $x(t_0)$, donde D denota al operador fraccionario de Caputo o de Riemann-Liouville, $\alpha \in (0, 1)$, $f : [t_0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua a pedazos en t y localmente Lipschitz en x sobre $[t_0, \infty) \times \Omega$, y $\Omega \in \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene al origen $x = 0$.

Un punto de equilibrio del sistema (1.9) se define como sigue:

Definición 1.4 *La constante x_0 es un punto de equilibrio de un sistema fraccional dinámico (1.9) si y sólo si $f(t, x_0) = {}_{t_0}D_t^\alpha x_0$.*

Definición 1.5 *La solución de (1.9) se dice Mittag-Leffler estable si*

$$\|x(t)\| \leq \{m[x(t_0)]E_\alpha(-\lambda(t - t_0)^\alpha)\}^b \quad (1.10)$$

donde t_0 es el tiempo inicial, $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda > 0$, $b > 0$, $m(0) = 0$, $m(x) \geq 0$, y $m(x)$ es localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$ con constante de Lipschitz m_0 .

1. INTRODUCCIÓN

Para sistemas de orden fraccionario lineales e invariantes en el tiempo, $f(x, t) = Ax$, podemos garantizar la estabilidad en el sentido de Lyapunov. Se toma el siguiente sistema, con $0 < \alpha < 1$:

$$x^{(\alpha)} = {}_0^c D_t^\alpha x(t) = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad (1.11)$$

y se usa el Teorema 1.1, para hacer el siguiente enunciado.

Estabilidad interna para sistemas no lineales autónomos fraccionarios.

Ahora para garantizar la estabilidad de sistemas no lineales de orden fraccionario de una cierta clase, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.3 [109] *Considérese el sistema dinámico de orden fraccionario n -dimensional*

$$x^{(\alpha)} = Ax + g(x) \quad (1.12)$$

donde A es una matriz, g es una función no lineal de x , y $0 < \alpha < 1$, si:

1. La solución $x(t) = 0$ de $x^{(\alpha)} = Ax$ es asintóticamente estable, y $\alpha\rho(A) > 1$ ($\rho(A) \equiv$ radio espectral de A).
2. $g(0) = 0$ y $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$

Entonces $x(t) = 0$, para $0 \leq t_0 \leq t$, es una solución estable de (1.12). ■

Este último (Teorema 1.3) es muy importante, puesto que nos da las condiciones necesarias para garantizar la estabilidad de un sistema no lineal autónomo fraccionario. Es decir, este puede ser considerado como una extensión del método indirecto de Lyapunov.

El siguiente resultado es válido para la obtención de la estabilidad asintótica de sistemas fraccionarios parcialmente autónomos con $1 < \alpha < 2$.

Considere al sistema fraccionario no lineal n -dimensional con operador fraccionario de Caputo

$$x^{(\alpha)} = Ax + g(t, x), \quad t > t_0, \quad (1.13)$$

y las condiciones iniciales

$$x^{(\alpha-k)}(t)|_{t=t_0} = x_{k-1} \quad (k = 1, 2), \quad (1.14)$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, y $1 < \alpha < 2$, $g(t, x) : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua en la que $g(t, 0) = 0$; además, $g(t, x)$ cumple la condición de Lipschitz respecto a x .

Teorema 1.4 *Si la matriz A es tal que $|\arg(\text{spec}(A))| \neq 0$, $|\arg(\text{spec}(A))| > \alpha\pi/2$, $\alpha + 1/\|A\| < 2$, y supóngase que la función $g(t, x)$ satisface uniformemente*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\|g(t, x)\|}{\|x\|} = 0, \quad t \in [t_0, \infty) \quad (1.15)$$

entonces la solución cero de (1.13) es asintóticamente estable.

La prueba a este teorema para la derivada de Caputo se sigue de la prueba del Teorema 3.3 en [113] y la aplicación del Lema 2.7 de [113] y la desigualdad de Gronwall-Bellman.

1.4.3. Métodos numéricos para simular sistemas fraccionarios

Existen varios métodos numéricos para simular las derivadas de orden fraccionaria, algunos de ellos pueden ser consultados en [22, 15, 40].

Para las simulaciones de este trabajo se usan las tablas que aparecen en [40], basadas en el método presentado en [15] y para algunos otros casos se usan las implementaciones de [81] para sistemas fraccionarios caóticos, basados en algunos métodos presentados en [22].

Específicamente, en [40] se presenta el Cuadro (1.1) para aproximaciones de $1/s^\alpha$, con errores de aproximadamente 2 dB

| | |
|--|---|
| $\frac{1}{s^{0.1}} \approx \frac{220.4s^4+5004s^3+5038s^2+234.5s+0.484}{s^5+359.8s^4+5742s^3+4247s^2+147.7s+0.2099}$ | $\frac{1}{s^{0.2}} \approx \frac{60.95s^4+816.9s^3+582.8s^2+23.24s+0.04934}{s^5+134s^4+956.5s^3+383.5s^2+8.953s+0.01821}$ |
| $\frac{1}{s^{0.3}} \approx \frac{23.76s^4+224.9s^3+129.1s^2+4.733s+0.01052}{s^5+64.51s^4+252.2s^3+63.61s^2+1.104s+0.002267}$ | $\frac{1}{s^{0.4}} \approx \frac{25s^4+558.5s^3+664.2s^2+44.15s+0.1562}{s^5+125.6s^4+840.6s^3+317.2s^2+7.428s+0.02343}$ |
| $\frac{1}{s^{0.5}} \approx \frac{15.97s^4+593.2s^3+1080s^2+135.4s+1}{s^5+134.3s^4+1072s^3+543.4s^2+20.10s+0.1259}$ | $\frac{1}{s^{0.6}} \approx \frac{8.579s^4+255.6s^3+405.3s^2+35.93s+0.1696}{s^5+94.22s^4+472.9s^3+134.8s^2+2.639s+0.009882}$ |
| $\frac{1}{s^{0.7}} \approx \frac{5.406s^4+177.6s^3+209.6s^2+9.197s+0.01450}{s^5+88.12s^4+279.2s^3+33.3s^2+1.927s+0.0002276}$ | $\frac{1}{s^{0.8}} \approx \frac{5.235s^3+1453s^2+5306s+254.9}{s^4+658.1s^3+5700s^2+658.2s+1}$ |
| $\frac{1}{s^{0.9}} \approx \frac{1.766s^2+38.27s+4.914}{s^3+36.15s^2+7.789s+0.01}$ | |

Cuadro 1.1: Aproximaciones de operadores fraccionarios con un error de aproximadamente 2 dB de $\omega = 10^{-2}$ a 10^2 rad/s.

Preservación en Sistemas Fraccionarios

Se hizo un estudio sobre las familias de sistemas dinámicos no lineales de orden fraccionario de la forma $\dot{x} = Ax + g(x)$, donde $g(x)$ es la parte no lineal del sistema. En este capítulo se presentan las condiciones obtenidas para la preservación de estabilidad de sistemas de orden fraccionario, para después usar estos resultados para obtener la preservación de sincronización tipo maestro-esclavo de dichos sistemas. Este es un resultado novedoso, que es válido para sistemas con orden fraccionario entre 0 y 2.

Por otro lado se aborda el problema de una extensión de técnicas de preservación en sistemas lineales de orden entero para garantizar la estabilización o pasificación de sistemas lineales de orden distribuido.

En las secciones 2.2 y 2.3 se presentan las condiciones para la preservación de estructura del control u en la estabilización o sincronización de sistemas no lineales de orden fraccionario. En la sección 2.4 se presenta primero en la subsección 2.4.1 algunos resultados preliminares específicos para luego en la subsección 2.4.2 desarrollar la extensión de las técnicas de preservación en sistemas lineales de orden entero a sistemas lineales de orden distribuido.

2.1. Introducción

El primer problema puede ser planteado de la siguiente forma: si se tiene un sistema autónomo y no lineal *original* que puede ser descompuesto en su parte lineal y su parte no lineal y cuya solución en el origen es estable, entonces se quiere saber que tipo de modificaciones pueden ocurrir al orden fraccionario, a la parte lineal y a la parte no lineal de tal forma que la solución en el origen del sistema modificado también sea estable.

El segundo problema es por semejanza entre un sistema lineal original de orden entero y un sistema lineal *semejante* de orden distribuido, dando condiciones en las que la estructura del control que estabiliza al sistema de orden entero será útil para construir la

estructura del control que estabilice al sistema fraccionario.

Es importante hacer notar que los resultados obtenidos son *analíticos*, por lo que su importancia reside en su relación con la robustez de controladores y en la generación de métodos de preservación, no en el uso de un controlador avanzado en la estabilización, pasificación y/o sincronización.

Las secciones 2.2 y 2.3 tratan con el primer problema y la sección 2.4 trata el segundo.

2.2. Condiciones para Preservación de Estabilidad en FOS

Es necesario primero dar una definición de preservación de estabilidad en sistemas de orden fraccionario (FOS) para poder dar las condiciones para la preservación en forma de una Proposición o Teorema.

Definición 2.1 *Dado un sistema lineal autónomo de orden fraccionario conmensurable asintóticamente estable del tipo*

$$x^{(\alpha)} = Ax, \quad (2.1)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 2$ and $A = PJ_AP^{-1}$. Si tenemos una transformación $\psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n \times n}$, específicamente $\psi(\alpha, A) = (\alpha\beta, MA)$, tal que el nuevo sistema

$$x^{(\alpha\beta)} = MAx, \quad \text{with } 0 < \beta \leq 1 \quad (2.2)$$

también es asintóticamente estable, donde $MA = PJ_MJ_AP^{-1}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para alguna matriz $M = PJ_MP^{-1}$, donde J_M y J_A son matrices en su forma de Jordan, entonces se dice que ψ es una transformación que preserva estabilidad asintótica para sistemas lineales autónomos fraccionarios.

Se debe notar que para las matrices M y A se esta usando la misma matriz P . También vale la pena mencionar que dada la matriz en forma de Jordan J_A , que corresponde a la matriz A , la matriz en forma de Jordan J_M que representa las modificaciones debe tener el mismo orden y tipo de bloques que J_A . La razón de esto es que en la mayoría de las aplicaciones a la ingeniería se necesita que $MA \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pero también se debe notar que otra forma canónica (observable o controlable), podría resultar más conveniente que la forma de Jordan en la construcción de controladores de retroalimentación de salida.

En forma similar, se tiene la definición para la preservación de estabilidad de la solución en el origen de sistemas no lineales de orden fraccionario conmensurable que son parcialmente autónomos.

2. PRESERVACIÓN EN SISTEMAS FRACCIONARIOS

Definición 2.2 Dado un sistema no lineal de orden fraccionario conmensurable del tipo

$$x^{(\alpha)} = Ax + g(t, x) \quad (2.3)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = PJ_AP^{-1}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 2$, $g : [t_0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua a pedazos en t y localmente Lipschitz en x sobre $[t_0, \infty) \times \Omega$, y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene al origen y el origen mismo es una solución estable del sistema. Si tenemos una transformación $\Psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n \times n} \times C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n \times n} \times C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, específicamente $\Psi(\alpha, A, g(\cdot)) = (\alpha\beta, MA, cg(\cdot))$, de tal forma que en el nuevo sistema

$$x^{(\alpha\beta)} = MAx + cg(t, x) \quad (2.4)$$

el origen también es una solución estable, donde $c \in \mathbb{R}$, $MA = PJ_M J_A P^{-1}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para alguna matriz $M = PJ_M P^{-1}$, donde J_M y J_A son matrices en forma de Jordan, entonces se dice que la transformación es una transformación que preserva estabilidad para sistemas no lineales de orden fraccionario conmensurable parcialmente autónomos.

Nota 2.1 En la definición 2.2, para el caso en el que $0 < \alpha < 1$ la parte no lineal también es autónoma, i.e., para el sistema (2.3) se tiene $x^{(\alpha)} = Ax + g(x)$, y para el sistema modificado (2.4) se tiene $x^{(\alpha\beta)} = MAx + cg(x)$.

Se puede obtener un criterio para la preservación de estabilidad de la solución en el origen de sistemas autónomos no lineales de orden fraccionario conmensurable basándose en los Teoremas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4, así como los resultados de orden entero [27].

Proposición 2.1 Considere un sistema autónomo no lineal de orden fraccionario conmensurable de la forma

$$x^{(\alpha)} = Ax + g(x) \quad (2.5)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua, D es una vecindad del origen para $0 < \alpha < 1$.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con el argumento de su k -ésimo valor característico denotado por $\theta_k = \arg(\lambda_k(A))$. Dada una transformación $\Psi(\alpha, A, g(\cdot)) = (\alpha\beta, MA, cg(\cdot))$ tal que el nuevo sistema es

$$x^{(\alpha\beta)} = MAx + cg(x), \quad (2.6)$$

donde $c \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $0 < \beta \leq 1$, $\phi_k = \arg(\lambda_k(M))$ es el argumento del k -ésimo valor característico de M , $A = PJ_AP^{-1}$, $M = PJ_MP^{-1}$. Además sea $\phi_{a_k} = -\theta_k + \alpha\pi/2$, $\phi_{b_k} = -\theta_k - \alpha\pi/2$, $\phi_{max} = \max_k \{\phi_{a_k}\}$, $\phi_{min} = \min_k \{\phi_{b_k}\}$, si

$$\phi_{min} > \phi_k > \phi_{max} \quad (2.7)$$

para cada $k = 1, 2, \dots, n$, y si el sistema $x^{(\alpha)} = Ax$ es asintóticamente estable, $\alpha\rho(A) > 1$, $g(0) = 0$, $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \|g(x)\|/\|x\| = 0$ and $\rho(MA) \geq \rho(A)$, entonces tal transformación es una transformación que preserva estabilidad del origen de los sistemas del tipo (2.5).

Prueba:

La primer parte de la hipótesis dice que el sistema original (2.5) cumple las condiciones del Teorema 1.4, de ahí se tiene que $|\theta_k| > \alpha\pi/2$ for $k = 1, 2, \dots, n$, y que su origen es una solución estable.

Otra parte de la hipótesis dice que $g(t, x)$ cumple las condiciones del Teorema 1.4, y de la prueba del Teorema 1.4 se puede observar que tales condiciones también se cumplen para $cg(t, x)$.

Además se pidió que $\|MA\| \geq \|A\|$, $\alpha + 1/\|A\| < 2$ y $\beta < \alpha(2 - 1/\|MA\|)$ se cumplan, con esto se tiene que $\alpha\beta + 1/\|MA\| < 2$. Como resultado sólo se necesita que $|\arg(\text{spec}(MA))| > \alpha\beta\pi/2$ para cumplir las condiciones del Teorema 1.4 para el sistema modificado (2.6).

Por argumentos similares a los de la prueba de la Proposición 1, se tiene que (2.7) se cumple y además se pidió que $\beta \leq 1$ se cumpla, por lo que las condiciones del Teorema 1.4 se cumplen y Ψ es una transformación que preserva estabilidad del origen de sistemas parcialmente autónomos de orden fraccionario conmensurable de la forma(2.5). \square

Los siguientes Corolarios son consecuencia directa de la Proposición 2.1 y del Teorema 3.3 en [113].

Corolario 2.1 *Considere un sistema lineal autónomo de orden fraccionario conmensurable de la forma*

$$x^{(\alpha)} = Ax, \text{ with } 0 < \alpha < 2 \tag{2.8}$$

que cumple las condiciones del Teorema 1.2 o del Teorema 1.1 respectivamente, si se tiene una transformación $\Psi(\alpha, M) = (\alpha\beta, MA)$ tal que el nuevo sistema es

$$x^{(\alpha\beta)} = MAx, \tag{2.9}$$

con todas las variables y las matrices como han sido definidas antes, y si la desigualdad

$$\phi_{min} > \phi_k > \phi_{max} \tag{2.10}$$

se cumple, con ϕ_k , ϕ_{min} y ϕ_{max} como se definieron antes, entonces Ψ es una transformación que preserva estabilidad asintótica de los sistemas autónomos lineales de orden conmensurable de la forma (2.8).

Nota 2.2 *Si se toma el caso de $\alpha = 1$ para la Proposición 2.1, se tienen condiciones semejantes para la preservación de estabilidad del origen para un sistema dinámico no lineal de orden entero de la forma $\dot{x} = Ax + g(x)$. Y si se toma el caso de $\alpha = 1$ para el Corolario 2.1 se tendrán condiciones para la preservación de la estabilidad asintótica de un sistema autónomo lineal de orden entero de la forma $\dot{x} = Ax$, por supuesto, sin considerar la modificación sobre el orden de la derivada.*

Nota 2.3 *Hay que notar que las condiciones obtenidas por los autores de [27] y [5] para la preservación de estabilidad de sistemas no lineales de orden entero son diferentes a las obtenidas al escoger $\alpha = 1$ en la Proposición 2.1, y no pueden ser obtenidas como un caso particular de la Proposición 2.1.*

2.3. Condiciones para Preservación de Sincronización en FOS

Dadas las condiciones de la Proposición 2.1, se quiere ilustrar como usar estos criterios para garantizar la preservación de estabilización y sincronización.

2.3.1. Preservación de la estabilización de sistemas autónomos no lineales de orden fraccionario conmensurable

De trabajos previos sobre estabilización de sistemas fraccionarios se sabe que para un sistema autónomo no lineal de orden fraccionario conmensurable de la forma $x^{(\alpha)} = Ax + g(x) + u$, donde $g(x)$ cumple las condiciones del Teorema 1.3 y con $A = PJ_AP^{-1}$, se puede escoger un control $u = -K_1x$, $K_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con $K_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de tal forma que para el sistema $x^{(\alpha)} = (A - K_1)x + g(x)$ el origen es una solución estable. Pero en este caso particular se quiere que $A - K_1 = P(J_A - J_{K_1})P^{-1}$, por lo que se necesita construir a K_1 como $K_1 = PJ_{K_1}P^{-1}$, donde su forma de Jordan J_{K_1} también tiene la restricción que sus bloques de Jordan deben ser del mismo orden y del mismo tipo que los de J_A .

Para el sistema modificado $x^{(\alpha\beta)} = MAx + cg(x) + u$ se usa un control semejante (i.e., con la misma K_1) definido como $u = -MK_1x$, donde $M := PJ_MP^{-1}$ cumple las condiciones de la Proposición 2.1, y que todas las otras matrices están definidas como antes, de tal modo que para el sistema $x^{(\alpha\beta)} = (MA - MK_1)x + cg(x)$ el origen es también una solución estable.

2.3.2. Preservación de sincronización práctica de sistemas autónomos no lineales de orden fraccionario conmensurable

Primero se necesita describir el esquema de sincronización. Consideremos dos sistemas de orden fraccionario para representar al sistema maestro y al sistema esclavo, respectivamente

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{M}}^{(\alpha)} &= A_{\mathcal{M}}x_{\mathcal{M}} + g(x_{\mathcal{M}}), & x_{\mathcal{S}}^{(\alpha)} &= A_{\mathcal{S}}x_{\mathcal{S}} + g(x_{\mathcal{S}}) + w, \\ y_{\mathcal{M}} &= h_{\mathcal{M}}(x_{\mathcal{M}}). & y_{\mathcal{S}} &= h_{\mathcal{S}}(x_{\mathcal{S}}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $x_{\mathcal{M}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado del sistema maestro, $y_{\mathcal{M}} \in \mathbb{R}^p$ es la salida del sistema maestro, $x_{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema esclavo, $w \in \mathbb{R}^n$ es la entrada de control y $y_{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^p$ es la salida del sistema esclavo.

En este esquema de sincronización el sistema maestro representa la dinámica *objetivo*, i.e. la dinámica deseada, mientras que el sistema esclavo es el sistema a ser controlado.

Considérese que todas las salidas están disponibles, solo para ilustrar la efectividad del método al mostrar todos los estados en las gráficas del error de sincronización de los ejemplos; por supuesto, el orden de la salida puede ser menor que el orden del vector de estados. Esta consideración da como resultado un error de sincronización de la forma siguiente:

$$e = x_{\mathcal{M}} - x_{\mathcal{S}}, \quad (2.12)$$

ahora se debe encontrar una función w tal que $\|e(t)\|$ esté acotada en un subconjunto que contiene al origen, debido a que se utilizan los resultados de [109], esto sólo dará condiciones para la estabilidad (no estabilidad asintótica) del origen. Debido a esto, este enfoque es llamado sincronización *práctica*.

Se escoge el controlador

$$w = g(x_{\mathcal{M}}) - g(x_{\mathcal{S}}) - g(x_{\mathcal{M}} - x_{\mathcal{S}}) + A_{\mathcal{M}}x_{\mathcal{M}} - A_{\mathcal{S}}x_{\mathcal{S}} - A_{\mathcal{S}}(x_{\mathcal{M}} - x_{\mathcal{S}}) + K_2(x_{\mathcal{M}} - x_{\mathcal{S}}), \quad (2.13)$$

donde, $K_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, de tal forma que la dinámica del error está dada por

$$e^{(\alpha)} = x_{\mathcal{M}}^{(\alpha)} - x_{\mathcal{S}}^{(\alpha)} = (A_{\mathcal{S}} - K_2)e + g(e). \quad (2.14)$$

Como antes, dado que $A_{\mathcal{S}} = P_{A_{\mathcal{S}}} J_{A_{\mathcal{S}}} P_{A_{\mathcal{S}}}^{-1}$ se tiene que $A_{\mathcal{S}} - K_2 = P_{A_{\mathcal{S}}}(J_{A_{\mathcal{S}}} - J_{K_2})P_{A_{\mathcal{S}}}^{-1}$, y por lo tanto se necesita construir K_2 como $K_2 = P_{A_{\mathcal{S}}} J_{K_2} P_{A_{\mathcal{S}}}^{-1}$ de tal forma que el origen del sistema dinámico del error sea estable. Nuevamente, la forma de Jordan J_K tiene la restricción que sus bloques de Jordan deben ser del mismo orden y tipo que los de $J_{A_{\mathcal{S}}}$.

Se quiere ilustrar que tipo de transformaciones pueden ser aplicadas al sistema maestro y al sistema esclavo de tal forma que el mismo K_2 establezca al origen del sistema del error de sincronización. Para hacer esto, se definen las siguientes matrices de modificación $M_{\mathcal{M}} := P_{A_{\mathcal{M}}} J_M P_{A_{\mathcal{M}}}^{-1}$ y $M_{\mathcal{S}} := P_{A_{\mathcal{S}}} J_M P_{A_{\mathcal{S}}}^{-1}$ que cumplen las condiciones de la Proposición 2.1. Con estas modificaciones aplicadas al sistema correspondiente en la siguiente forma

$$x_{\mathcal{M}}^{(\alpha)} = M_{\mathcal{M}} A_{\mathcal{M}} x_{\mathcal{M}} + g(x_{\mathcal{M}}) \quad x_{\mathcal{S}}^{(\alpha)} = M_{\mathcal{S}} A_{\mathcal{S}} x_{\mathcal{S}} + g(x_{\mathcal{S}}) + w, \quad (2.15)$$

con el error de sincronización definido como en (2.12), y el control definido como

$$w = g(x_{\mathcal{M}}) - g(x_{\mathcal{S}}) - g(e) + M_{\mathcal{M}} A_{\mathcal{M}} x_{\mathcal{M}} - M_{\mathcal{S}} A_{\mathcal{S}} x_{\mathcal{S}} - M_{\mathcal{S}} A_{\mathcal{S}} x_{\mathcal{S}} + M_{\mathcal{S}} K_2 e \quad (2.16)$$

(el único cambio es que en vez del término $K_2 e$ ahora se tiene $M_{\mathcal{S}} K_2 e$), se tiene que el sistema autónomo no lineal de orden fraccionario conmensurable correspondiente al error de sincronización es

$$e^{(\alpha)} = M_{\mathcal{S}}(A_{\mathcal{S}} - K_2)e + g(e) = (M_{\mathcal{S}} A_{\mathcal{S}} - M_{\mathcal{S}} K_2)e + g(e). \quad (2.17)$$

Dado que se ha construido a la matriz M de tal forma que cumple las condiciones de la Proposición 2.1 es sencillo probar que el origen para el nuevo sistema dinámico correspondiente al error de sincronización es también estable. Note que la modificación de la parte lineal del campo vectorial asociada a la ecuación diferencial fraccionaria modifica la *variedad diferenciable* de sincronización, pero no la estabilidad.

2.4. Estabilización y pasificación de DOLTIS usando métodos de preservación

En los años pasados, se han desarrollado distintos métodos para la estabilización y la pasificación de sistemas LTI autónomos [92, 42, 25, 79, 34], que hacen referencia a varios problemas de la teoría del control clásico. Para sistemas lineales de orden distribuido se ha estudiado poco el problema de estabilización, y mucho menos el de pasificación, estos sistemas han ganado importancia reciente, como se menciona en el libro [112] y en los artículos [33, 75], en los que se presenta como una generalización de sistemas lineales fraccionarios. Recientemente, se han utilizado métodos de preservación en el dominio de la frecuencia para sistemas lineales fraccionarios, para preservar la estabilidad buscando encontrar el orden entero más cercano [99], o para desarrollar métodos de discretización de sistemas lineales fraccionarios [60], o para obtener métodos numéricos para la simulación de sistemas fraccionarios [98]. Para los sistemas lineales de orden fraccionario, hasta la fecha no hay métodos de preservación, hasta donde saben los autores.

Sin embargo, se ha desarrollado recientemente una metodología para la preservación de estabilización y pasificación de sistemas LTI [26, 29, 31, 28, 30], en esta sección se estudian problemas de estabilidad, estabilización y pasificación, entre otros. Por otro lado, no existe una metodología similar para sistemas lineales fraccionarios, y menos aún para sistemas lineales de orden fraccionario distribuido.

En esta sección se desarrollan varios resultados sobre la preservación de estabilización y pasificación de una familia de sistemas lineales de orden fraccionario distribuido, motivados por los problemas descritos anteriormente sobre los problemas abiertos sobre sistemas lineales de orden fraccionario distribuido, que generalizan la clase de sistemas frecuentemente reportados en la literatura (de orden fraccionario) [46, 83, 81, 71], usando métodos de preservación en el dominio de la frecuencia. En [75] se extienden resultados sobre la estabilidad de sistemas lineales de orden fraccionario distribuido, lo que nos permite extender algunos métodos clásicos para la estabilización y pasificación de sistemas LTI, a una nueva familia de sistemas lineales de orden fraccionario distribuido, que incluye entre otros sistemas a los sistemas llamados DOLTIS en [112].

Esta sección está organizada de la siguiente forma: en la subsección 2.4.1, se presentan algunos resultados preliminares necesarios y también se presentan algunos resultados

2.4. ESTABILIZACIÓN Y PASIFICACIÓN DE DOLTIS USANDO MÉTODOS DE PRESERVACIÓN

relevantes a la preservación en el dominio de la frecuencia. En la subsección 2.4.2, se presentan resultados para los problemas de estabilización y pasificación de una gran clase de sistemas lineales de orden fraccionario distribuido, y la estabilización de una clase más general de sistemas mediante la ubicación de polos con retroalimentación estática con restricciones.

2.4.1. Resultados previos

Al extender el concepto de la derivada de orden entero se ha definido a la derivada fraccionaria; y una derivada fraccionaria comúnmente utilizada es la derivada de Caputo.

En el presente trabajo se describe a un sistema de orden distribuido por la siguiente ecuación de evolución lineal autónoma (LTI) de orden fraccionario distribuido y la ecuación de salida de evolución de orden distribuido:

$$\begin{aligned} D_t^{b_1(\alpha)} \mathbf{x}(t) &= AD_t^{b_2(\alpha)} \mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= CD_t^{b_2(\alpha)} \mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde $\alpha \in (0, 1]$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $D \in \mathbb{R}^{m \times r}$ y $\hat{B}_1(s) = \int_0^1 b_1(\alpha) s^\alpha d\alpha$, $\hat{B}_2(s) = \int_0^1 b_2(\beta) s^\beta d\beta$ son la función distribuida respecto a las funciones de densidad $b_1(\alpha) \geq 0$ y $b_2(\beta) \geq 0$.

Los problemas estudiados en este trabajo son: 1) El problema de estabilización para el sistema (2.18) con control por retroalimentación de estado estática y con control por retroalimentación de salida estática, 2) El problema de pasividad para el sistema (2.18) con control por retroalimentación de salida estática, y 3) La estabilización de una clase más general de sistemas mediante la ubicación de polos con control por retroalimentación de salida estática con restricciones.

A continuación se presenta parte de la notación, así como algunas definiciones usadas en esta sección.

$\text{Im } \mathbb{C} \triangleq \{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s = 0\}$, $\mathbb{C}^+ \triangleq \{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s > 0\}$, $\overline{\mathbb{C}}^+ \triangleq \{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s \geq 0\}$, $\mathbb{C}^- \triangleq \{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s < 0\}$, $\overline{\mathbb{C}}^- \triangleq \{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s \leq 0\}$, $\overline{\mathbb{C}}_e^+ \triangleq \overline{\mathbb{C}}^+ \cup \{\infty\}$, $(h)(V) \triangleq \{h(s) : s \in V\}$ i.e., es la imagen del subconjunto $V \subseteq \mathbb{C}$ bajo la función $h(s)$. Sea $(h)^{-1}(s_1)$ el conjunto de elementos de $s_k \in \mathbb{C}$ tal que $h(s_k) = s_1$ i.e., los elementos s_k son la preimagen o imagen inversa de s_1 bajo la función $h(s)$. En esta sección se usan los siguientes sectores y regiones: $R_\lambda \triangleq \{s \in \mathbb{C} : |\arg s| < \frac{\pi}{\lambda}\}$, $\bar{R}_\lambda \triangleq \{s \in \mathbb{C} : |\arg s| \leq \frac{\pi}{\lambda}\}$, $L_\lambda \triangleq \{s \in \mathbb{C} : |\arg s| > \frac{\pi}{\lambda}\}$, $\bar{L}_\lambda \triangleq \{s \in \mathbb{C} : |\arg s| \geq \frac{\pi}{\lambda}\}$ and $I_\lambda \triangleq \{s \in \mathbb{C} : |\arg s| = \frac{\pi}{\lambda}\}$.

Hipotesis 2.1 *En esta sección, se asume que todas las funciones complejas consideradas están en la primer hoja (principal) de Riemann y por lo tanto son funciones con un sólo valor.*

2. PRESERVACIÓN EN SISTEMAS FRACCIONARIOS

Definición 2.3 Se considera a las funciones $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

- a). Una función analítica $f(s)$ que no es cero en R_λ , será llamada una función Hurwitz en el sector R_λ , donde λ es un entero positivo mayor que uno.
- b). Una función analítica $f(s)/g(s)$ es positiva si $\text{Re}[f(s)/g(s)] \geq 0$ para cada $s \in R_\lambda$ y $g(s) \neq 0$.
- c). Un cociente de funciones $f(s)$ y $g(s)$ (por ejemplo $f(s)/g(s)$) es una función coprima en R_λ , si $f(s)$ y $g(s)$ no tienen ceros en común en \bar{R}_λ .

Lema 2.1 [93, 94] Si $f(s)/g(s)$ es una función positiva y coprima en R_λ , entonces $f(s)$ y $g(s)$ son funciones Hurwitz en R_λ .

Definición 2.4 . La función $f(s)/g(s)$ es una lambda función Hurwitz-Positiva-Coprime (función λ -HPC), si satisface los incisos b) y c) de la Definición 2.3. Note que por el Lema 2.1, una función λ -HPC satisface el inciso a), i.e., $f(s)$ y $g(s)$ son funciones Hurwitz en R_λ .

Nota 2.4 . Note que f/g es una función λ -HPC ssi g/f es una función λ -HPC, y que una función λ -HPC satisface

- a). $(f/g)(R_\lambda) \subset \mathbb{C}^+$,
- b). $(f/g)(\bar{R}_\lambda) \subset \bar{\mathbb{C}}_e^+$,
- c). Las funciones λ -HPC son una generalización de las funciones 2-HPC en [93, 94].

Definición 2.5 Sea \mathcal{RH}^∞ el dominio Euclidiano de las funciones propias, reales y racionales (cociente de polinomios). \mathbf{RH}^∞ es el conjunto de matrices con elementos en \mathcal{RH}^∞ .

Lema 2.2 Sea $f(s)/g(s)$ una función λ -HPC, y supóngase que $g(s)$ tiene un número finito de ceros en I_λ , entonces para cada $p(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \in \mathcal{RH}^\infty$, se tiene que $p(f(s)/g(s))$ es una función Hurwitz en \bar{R}_λ .

Prueba. Primero, por el Lema 2.1, f y $g \in H$. Segundo, supongamos que $g(s)$ tiene ceros en s_1, \dots, s_l on I_λ . Ahora, se prueba que $p(f(s)/g(s)) \in \mathcal{RH}^\infty$. Dado que $f(s)/g(s)$ es una función positiva, se tiene que

$$(f/g)(\bar{R}_\lambda) \subset \bar{\mathbb{C}}_e^+$$

excepto en los ceros s_1, \dots, s_l en I_λ de $g(s)$. Por otro lado, $p(s)$ es una función Hurwitz en \bar{R}_λ , y la composición de funciones analíticas es una función analítica, por lo que

2.4. ESTABILIZACIÓN Y PASIFICACIÓN DE DOLTIS USANDO MÉTODOS DE PRESERVACIÓN

$p(f(s)/g(s))$ es una función analítica en \bar{R}_λ . Los ceros s_1, \dots, s_l en I_λ no tienen ningún efecto. Para probar esto último, considere a los polinomios

$$\begin{aligned} N_p(s) &= a_n s^n + \dots + a_0 \\ D_p(s) &= b_m s^m + \dots + b_0 \end{aligned}$$

sin pérdida de generalidad, se asume que $N_p(s)$ y $D_p(s)$ son polinomios coprimos. Ahora al hacer la substitución se obtiene

$$\begin{aligned} p(f(s)/g(s)) &= \frac{N_p(f(s)/g(s))}{D_p(f(s)/g(s))} \\ &= \frac{a_n [f(s)/g(s)]^n + \dots + a_1 [f(s)/g(s)] + a_0}{b_m [f(s)/g(s)]^m + \dots + b_1 [f(s)/g(s)] + b_0} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^n a_i [g(s)]^{m-i} [f(s)]^i}{\sum_{k=0}^m b_k [g(s)]^{m-k} [f(s)]^k} \end{aligned}$$

Note que en los ceros s_1, \dots, s_l en I_λ , se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow s_i} p(f(s)/g(s)) = \begin{cases} a_n/b_m, & \text{if } m = n \\ 0, & \text{if } m > n \end{cases}$$

para $i = 1, \dots, l$; dado que $f(s)/g(s)$ es una función coprima en \bar{R}_λ . Por lo tanto, $p(f(s)/g(s))$ es una función Hurwitz en \bar{R}_λ . \square

Nota 2.5 *El último Lema generaliza los resultados en [26].*

Corolario 2.2 *Sea $f(s)/g(s)$ una función λ -HPC, y supóngase que $g(s)$ tiene un número finito de ceros en I_λ , entonces para cada matriz $Z(s)$ in \mathbf{RH}^∞ , se tiene que $Z(f(s)/g(s))$ es una matriz donde sus elementos son funciones Hurwitz en \bar{R}_λ .*

El siguiente lema prueba que las funciones HPC- λ son cerradas bajo composiciones de funciones.

Lema 2.3 *Si $f_1(s)/g_1(s)$ es una función λ_1 -HPC y $f_2(s)/g_2(s)$ es una función λ_2 -HPC tal que $(f_2/g_2)(\bar{R}_{\lambda_2}) \subseteq \bar{R}_{\lambda_1}$, y supóngase que $g_2(s)$ tiene un número finito de ceros en I_λ , entonces la composición de funciones $f_1(f_2(s)/g_2(s))/g_1(f_2(s)/g_2(s))$ es una función HPC- λ_2 .*

Prueba. Dadas $f_1(s)$ y $g_1(s)$ que no tienen ceros comunes en \bar{R}_{λ_1} , entonces $f_1(f_2(s)/g_2(s))$ y $g_1(f_2(s)/g_2(s))$ no tienen ceros comunes en \bar{R}_{λ_1} . Por un argumento *ad absurdum*, si $f_1(f_2(s_0)/g_2(s_0)) = 0 = g_1(f_2(s_0)/g_2(s_0))$ para algún valor $s_0 \in \bar{R}_{\lambda_2}$, entonces $f_2(s_0)/g_2(s_0)$ es un cero común en \bar{R}_{λ_1} de $f_1(s)$ y $g_1(s)$ (contradicción). Por lo tanto, el

2. PRESERVACIÓN EN SISTEMAS FRACCIONARIOS

ítem c) de la Definición 2.3 ha sido probado. Ahora, dado que $f_i(s)/g_i(s)$ son funciones positivas para $i = 1, 2$. Se tiene que

$$(f_i/g_i)(\bar{R}_{\lambda_i}) \subset \bar{\mathbb{C}}_e^+ \text{ and } (f_2/g_2)(\bar{R}_{\lambda_2}) \subseteq \bar{R}_{\lambda_1}$$

excepto en las ceros de la función $g_2(s)$. Considerando que la composición de funciones analíticas es una función analítica, y la última inclusión, se obtiene que $(f_1(f_2/g_2)/g_1(f_2/g_2))(\bar{R}_{\lambda_2}) \subset \bar{\mathbb{C}}_e^+$. Supóngase que s_1, \dots, s_l on I_λ son ceros de la función $g_2(s)$. Estos ceros no tienen ningún efecto. Dado el par $f_1(f_2(s)/g_2(s))$ y $g_1(f_2(s)/g_2(s))$, y el par $f_2(s)$ y $g_2(s)$ son funciones coprimas en \bar{R}_{λ_2} , y $f_1(s)/g_1(s)$ es una función positiva, i.e., $(f_1/g_1)(R_{\lambda_1}) \subset \bar{\mathbb{C}}_e^+$. Entonces

$$\lim_{s \rightarrow s_i} f_1(f_2(s)/g_2(s))/g_1(f_2(s)/g_2(s)) = \lim_{s \rightarrow \infty} f_1(s)/g_1(s) > 0.$$

En consecuencia, $(f_1(f_2/g_2)/g_1(f_2/g_2))(\bar{R}_{\lambda_2}) \subset \bar{\mathbb{C}}_e^+$. \square

Nota 2.6 *El Corolario 2.2 es una generalización de resultados en [29]. El Lema 2.3 es una generalización de los resultados en [26] y [104].*

Nota 2.7 *Note que el conjunto de funciones HPC- λ no es cerrado bajo la suma de funciones, y además no es cerrado bajo el producto de funciones.*

Definición 2.6 [7] *La matriz de transferencia racional propia $Z(s) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es real positiva (matriz PR) si:*

- a). $Z(s)$ no tiene polos en $\text{Re}(s) > 0$, i.e., $Z(s)$ es Hurwitz en \mathbb{C}^+ ,
- b). $Z(s)$ es real para todo real positivo s ,
- c). $Z(s) + Z^*(s) \geq 0$ para todo $\text{Re}(s) > 0$.

$Z^*(s)$ denota la transpuesta conjugada de la matriz $Z(s)$.

Proposición 2.2 *Si $Z(s) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una matriz PR y $f(s)/g(s)$ es una función HPC- λ donde $g(s)$ tiene un número finito de ceros en I_λ , entonces la matriz $Z(f(s)/g(s))$ satisface las siguientes propiedades:*

- a). Los elementos de la matriz $Z(f(s)/g(s))$ son funciones Hurwitz en \bar{R}_λ ,
- b). Si la función HPC- λ $f(s)/g(s)$ es real positiva para todo real positivo s , entonces la matriz $Z(f(s)/g(s))$ es real para todo positivo real s ,
- c). $Z(f(s)/g(s)) + Z^*(f(s)/g(s)) \geq 0$ para todo $s \in R_\lambda$.

2.4. ESTABILIZACIÓN Y PASIFICACIÓN DE DOLTIS USANDO MÉTODOS DE PRESERVACIÓN

Prueba. El ítem a) es una consecuencia inmediata del Corolario 2.2. El ítem b) es una consecuencia inmediata del ítem b) en la Definición 2.6. Para el ítem c), se usa el ítem iii) de la Proposición 8.2.6 en [6], que establece que la matriz Hermitiana

$$\Pi(s) \triangleq Z(s) + Z^*(s)$$

es semidefinida positiva si y sólo si cada subdeterminante principal de $\Pi(s)$ es no negativo. Considerando que todos los subdeterminantes principales de la matriz $\Pi(s)$ están en \mathcal{RH}^∞ , dado que \mathcal{RH}^∞ es un anillo conmutativo. El ítem c) de la Definición 2.6 es equivalente a que todos los subdeterminantes principales de $\Pi(s)$ sean no negativos para toda R_λ . Tomando en cuenta que cada función HPC- λ $f(s)/g(s)$ satisface $(f/g)(R_\lambda) \subset \mathbb{C}^+$, y substituyendo $f(s)/g(s)$ en la matriz $\Pi(s)$, se obtiene que todos los subdeterminantes principales de $\Pi(f(s)/g(s))$ son no negativos para toda R_λ , que es equivalente al ítem c) de esta Proposición. \square

La matriz $Z(f(s)/g(s))$ que satisface los ítems a), b) y c) de la Proposición 2.2 es llamada matriz PR- λ .

Lema 2.4 [7, 45] *Sea $Z(s) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz de transferencia racional propia, y supóngase que $\det [Z(s) + Z^T(-s)]$ no es idénticamente cero. Entonces, $Z(s)$ es una matriz real estrictamente positiva (matriz SPR) si y sólo si:*

- a). $Z(s)$ es Hurwitz en $\overline{\mathbb{C}}^+$,
- b). $Z(j\omega) + Z^T(-j\omega) > 0$ para todo real ω ,
y se satisface una de las dos condiciones siguientes:
- c). $Z(\infty) + Z^T(\infty) > 0$,
- d). $Z(\infty) + Z^T(\infty) = 0$ y $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 [Z(f(j\omega)/g(j\omega)) + Z^T(f(-j\omega)/g(-j\omega))] > 0$,
- e). $Z(\infty) + Z^T(\infty) \geq 0$ (pero no cero, ni singular) y que existen constantes positivas τ y δ tales que

$$\omega^2 \sigma_{\min}[H(j\omega) + H^T(-j\omega)] \geq \tau, \forall |\omega| \geq \delta$$

donde $\sigma_{\min}[M]$ significa el valor singular mínimo de la matriz M .

Una matriz $Z(s)$ es llamada matriz real estricta y fuertemente positiva (matriz SSPR), si satisface los ítems a), b) y c) del Lema 2.4.

2. PRESERVACIÓN EN SISTEMAS FRACCIONARIOS

Teorema 2.1 Sea $Z(s) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz SSPR, supóngase que $\det [Z(s) + Z^T(-s)]$ no es idénticamente cero y $f(s)/g(s)$ sea una función HPC- λ que satisface la condición b) en la Proposición 2.2, y donde $g(s)$ tiene un número finito de ceros en I_λ . Entonces la matriz $Z(f(s)/g(s))$ satisface las siguientes condiciones:

- a). Los elementos de la matriz $Z(f(s)/g(s))$ son funciones Hurwitz en \bar{R}_λ ,
- b). $Z(f(s)/g(s)) + Z^T(f(\bar{s})/g(\bar{s})) > 0$ para todo $s \in I_\lambda$,
- c). $Z(f(\infty)/g(\infty)) + Z^T(f(\infty)/g(\infty)) > 0$.

Prueba. La prueba del ítem a) es similar a el Lema 2.2 y el Corolario 2.2. Para la prueba del ítem b), se sabe que $(f/g)(\bar{R}_\lambda) \subset \bar{\mathbb{C}}_e^+$ en particular $(f/g)(I_\lambda) \subset \bar{\mathbb{C}}_e^+$, dado que $f(s)$ o $g(s)$ pueden ser cero para algunos elementos en I_λ . Hay que notar que la matriz $Z(f(s)/g(s)) + Z^T(f(\bar{s})/g(\bar{s}))$ es la matriz Hermitiana $\Pi(s)$. Por otro lado, $f(s)/g(s)$ es analítico en R_λ y por el Lema 2.4 cada elemento de $\Pi(s)$ es analítico en \bar{R}_λ , entonces cada elemento de $\Pi(f(s)/g(s))$ es analítico en \bar{R}_λ , por un argumento similar al Lema 2.2 y al Corolario 2.2. Ahora se usa el ítem iii) de la Proposición 8.2.7 en [6], que establece que la matriz Hermitiana $\Pi(s)$ es definida positiva si y sólo si cada subdeterminante principal de $\Pi(s)$ es positivo, y observe que cada subdeterminante principal de $\Pi(s)$ es analítico en \bar{R}_λ . Considerando que todos los subdeterminantes principales de la matriz $\Pi(s)$ están en \mathcal{RH}^∞ , dado que \mathcal{RH}^∞ es un anillo conmutativo. El ítem b) de el Lema 2.4 es equivalente a que todos los subdeterminantes principales de $\Pi(s)$ son positivos para todo s en $\text{Im } \mathbb{C}$.

Tomando en cuenta que cada función HPC- λ $f(s)/g(s)$ satisface $(f/g)(I_\lambda) \subset \bar{\mathbb{C}}_e^+$, substituyendo $f(s)/g(s)$ en la matriz $\Pi(s)$ y dado que cualquier matriz SSPR es una matriz PR, entonces por el ítem c) de la Proposición 2.2, se obtiene que todos los subdeterminantes principales de $\Pi(f(s)/g(s))$ son no negativos para toda $s \in I_\lambda$. Por otro lado, dado que la composición de funciones analíticas, adición de funciones analíticas y producto de funciones analíticas son funciones analíticas, entonces por el Corolario 2.2 todos los subdeterminantes principales de $\Pi(f(s)/g(s))$ son funciones analíticas en \bar{R}_λ . Entonces para valores $s \in R_\lambda$, se tiene que $\Pi(f(s)/g(s)) \geq 0$ para el ítem c) de la Proposición 2.2. Para el caso de valores $s \in \bar{R}_\lambda$, se tiene que para el Teorema de Módulo Mínimo, el módulo mínimo de cada subdeterminante principal de $\Pi(f(s)/g(s))$ es alcanzado en algún $s_0 \in I_\lambda$ y por el inciso c) de la Proposición 2.2 y un argumento de continuidad de la función $f(s)/g(s)$, se tiene que $\Pi(f(s_0)/g(s_0)) > 0$, puesto que si $f(s_0)/g(s_0) = 0$, por el inciso b) del Lema 2.4 con $\omega = 0$, se tiene $\Pi(0) > 0$. Luego cada subdeterminante principal de $\Pi(f(s)/g(s))$ es positivo para cualquier $s \in I_\lambda$. En consecuencia, todos los subdeterminantes principales de $\Pi(f(s)/g(s))$ son positivos en \bar{R}_λ , y por lo tanto todos los subdeterminantes principales de $\Pi(f(s)/g(s))$ son positivos para toda $s \in I_\lambda$, lo cual es equivalente al inciso b) de este Teorema. Para la prueba del inciso c), hay que notar

2.4. ESTABILIZACIÓN Y PASIFICACIÓN DE DOLTIS USANDO MÉTODOS DE PRESERVACIÓN

que $f(\infty)/g(\infty) \in \overline{\mathbb{C}}_e^+$ y dado que cualquier matriz SSPR es una matriz PR, entonces por el inciso c) de la Proposición 2.2 y un argumento similar al del inciso b) de este Teorema, se tiene que se cumple el inciso c) de este Teorema. \square

Los casos d) y e) del Lema 2.4 serán considerados más adelante. La matriz $Z(f(s)/g(s))$ que satisface los incisos a), b) y c) del Teorema 2.1 es llamada una matriz λ -SSPR.

Este resultado generaliza el Teorema en [26], y nos permite hablar de funciones matriciales SSPR para una clase de funciones matriciales o funciones matriciales reales fuerte y estrictamente positivas. Este resultado también será utilizado para la pasificación de sistemas lineales de orden fraccionario distribuido en la siguiente subsección.

Ahora se centrará la atención en polinomios fraccionales y funciones racionales fraccionarias.

Definición 2.7 *Un polinomio de orden fraccionario es una función compleja*

$$N(s) = c_1 s^{\frac{a_1}{b_1}} + c_2 s^{\frac{a_2}{b_2}} + \cdots + c_n s^{\frac{a_n}{b_n}}$$

donde $c_i \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $b_i \in \mathbb{Z}^+$ y a_i, b_i son primos relativos (coprimos) para $i = 1, \dots, n$. Ahora, sea λ el mínimo común múltiplo (mcm) de b_1, \dots, b_n denotado como $\lambda = \text{mcm}\{b_1, \dots, b_n\}$. Entonces, el polinomio de orden fraccionario puede ser expresado como

$$N(s) = c_1 s^{\frac{\lambda_1}{\lambda}} + c_2 s^{\frac{\lambda_2}{\lambda}} + \cdots + c_n s^{\frac{\lambda_n}{\lambda}}$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda$ son números enteros positivos y λ es prima relativa (coprima) con cada λ_i para $i = 1, \dots, n$. El grado fraccionario (fdeg) de $N(s)$ es definido como $\text{fdeg}\{N(s)\} = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

El dominio de definición para $N(s)$ es una superficie de Riemann con un número finito de hojas de Riemann ($\lambda \in \mathbb{Z}^+$) donde su origen es un punto de ramificación (de orden $\lambda - 1$) y el corte de la rama se asume en \mathbb{R}^- [47], donde la primer hoja de Riemann está dada por $-\pi < \arg(s) < \pi$ [71]. Sólo la primer hoja de Riemann es relevante para el análisis dinámico [101, 37]. Un polinomio de orden fraccionario $N(s)$ con $\text{fdeg}\{N(s)\} = n$, tiene exactamente n raíces en la primer hoja de Riemann [44].

Nota 2.8 *La función $f(s)/g(s) = \frac{s^{\frac{1}{\lambda}}}{1} = s^{\frac{1}{\lambda}}$ es una función λ -HPC para cada $\lambda \in \mathbb{Z}^+$. Los incisos a) y c) de la Definición 2.3 se deducen fácilmente así que serán omitidos. Note que la función $s^{\frac{1}{\lambda}}$ es un mapeo $\overline{\mathbb{C}}^+$ en el sector $\bar{R}_{2\lambda}$ y tiene un punto de ramificación en $s = 0$, la primera hoja de Riemann está dada por el sector R_λ , por lo tanto $(f/g)(\bar{R}_\lambda) \subset \overline{\mathbb{C}}^+$, y satisface el inciso b) de la Definición 2.5 [81]. Observe que la restricción a la primer hoja de Riemann nos fuerza a trabajar solamente en el dominio $-\frac{\pi}{\lambda} < \arg s < \frac{\pi}{\lambda}$. En este trabajo sólo se considera la primer hoja de Riemann para todas las funciones, con esta restricción las funciones son de una sola variable.*

2. PRESERVACIÓN EN SISTEMAS FRACCIONARIOS

Nota 2.9 1. Es claro que cada función PR con polinomios de numerador y denominador coprimos es una función 2-HPC. Pero la implicación en el sentido contrario es falsa.

2. Por el Lema 2.3 y la Nota 2.8, si $h(s) = \frac{N_h(s)}{D_h(s)} = \frac{a_n s^n + \dots + a_0}{b_m s^m + \dots + b_0}$ es una función PR, entonces $h(s^{\frac{1}{\lambda}}) = \frac{N_h(s^{\frac{1}{\lambda}})}{D_h(s^{\frac{1}{\lambda}})}$ es una función λ -HPC para cada $\lambda \in \mathbb{Z}^+$ con $\lambda > \max\{n, m\}$ en el dominio $-\frac{\pi}{\lambda} < \arg s < \frac{\pi}{\lambda}$.

Recordando criterio de Matignon para la estabilidad para sistemas lineales de orden fraccionario conmesurable en el caso de tener una representación externa (e. g., función de transferencia) [65] está dada de la siguiente forma.

Un sistema de orden fraccionario conmesurable descrito por la función de transferencia racional $g(s) = \frac{a_1 s^{\frac{\sigma_1}{\lambda}} + a_2 s^{\frac{\sigma_2}{\lambda}} + \dots + a_n s^{\frac{\sigma_n}{\lambda}}}{c_1 s^{\frac{\lambda_1}{\lambda}} + c_2 s^{\frac{\lambda_2}{\lambda}} + \dots + c_n s^{\frac{\lambda_n}{\lambda}}}$ es estable si y solo si

$$|\arg(r_i)| > \frac{\pi}{2\lambda} \text{ for all } i$$

donde r_i es la i -ésima raíz del polinomio $c_1 s^{\lambda_1} + c_2 s^{\lambda_2} + \dots + c_n s^{\lambda_n}$.

Definición 2.8 [26, 29] Una función de transferencia $h(s)$ de grado relativo cero es SPR0 si y sólo si

- $h(s)$ es analítica en $\bar{\mathbb{C}}^+$,
- $\operatorname{Re}[h(j\omega)] > 0$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$

Ahora consideramos los casos d) y e) del Lema 2.4 cuando $f(s)/g(s) = \frac{N_h(s^{\frac{1}{\lambda}})}{D_h(s^{\frac{1}{\lambda}})} = \frac{a_n s^{\frac{n}{\lambda}} + \dots + a_0}{b_n s^{\frac{n}{\lambda}} + \dots + b_0}$ con $\lambda \in \mathbb{Z}^+$ y $\lambda > n$.

Corolario 2.3 Sea $Z(s) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sea una matriz SPR, supóngase que $\det[Z(s) + Z^T(-s)]$ no es idénticamente cero, y $f(s)/g(s) = h(s^{\frac{1}{\lambda}}) = \frac{N_h(s^{\frac{1}{\lambda}})}{D_h(s^{\frac{1}{\lambda}})}$ donde $h(s) = \frac{N_h(s)}{D_h(s)}$ es una función SPR0 con $\lambda > n$. Entonces la matriz $Z(f(s)/g(s))$ satisface las siguientes propiedades:

- Los elementos de la matriz $Z(f(s)/g(s))$ son funciones Hurwitz en \bar{R}_λ ,
- $Z(f(s)/g(s)) + Z^T(f(\bar{s})/g(\bar{s})) > 0$ para toda $s \in I_\lambda$,
- $Z(f(\infty)/g(\infty)) + Z^T(f(\infty)/g(\infty)) > 0$.

2.4. ESTABILIZACIÓN Y PASIFICACIÓN DE DOLTIS USANDO MÉTODOS DE PRESERVACIÓN

Prueba. Primero hay que observar que por el Lema 2.3 y la Nota 2.8 $f(s)/g(s) = \frac{N_h(s^{\frac{1}{\lambda}})}{D_h(s^{\frac{1}{\lambda}})}$ es una función λ -HPC y satisface la condición b) en la Proposición 2.2, donde $g(s) = D_h(s^{\frac{1}{\lambda}})$ tiene un número finito de ceros en I_λ . Entonces por el Teorema 2.1 se cumplen los incisos a) y b) de este corolario. Para el inciso c), por la Definición 2.8, se obtiene

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s)/g(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{N_h(s^{\frac{1}{\lambda}})}{D_h(s^{\frac{1}{\lambda}})} = \varepsilon \in \mathbb{R}^+.$$

Ahora, tomando en cuenta que cualquier matriz SPR es una matriz PR, por el inciso c) de la Definición 2.6, los incisos d) y e) del Lema 2.4, un argumento similar al de tomado en los incisos b) y c) del Teorema 2.1, y que $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{N_h(s^{\frac{1}{\lambda}})}{D_h(s^{\frac{1}{\lambda}})} = \varepsilon$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} Z(f(s)/g(s)) + Z^T(f(\bar{s})/g(\bar{s})) &= \\ Z(f(\infty)/g(\infty)) + Z^T(f(\infty)/g(\infty)) &= \\ Z(\varepsilon) + Z^T(\varepsilon) &> 0. \end{aligned}$$

Entonces el inciso c) de este corolario se cumple. \square

En consecuencia, bajo las condiciones del Corolario 2.3, la matriz $Z(s)$ es una matriz λ -SSPR.

2.4.2. Resultados de Estabilización y pasificación de DOLTIS usando métodos de preservación

En esta sección se presentan resultados sobre estabilización y pasificación de sistemas lineales de orden fraccionario distribuido de la clase 2.18

$$\begin{aligned} D_t^{b_1(\alpha)} \mathbf{x}(t) &= AD_t^{b_2(\alpha)} \mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= CD_t^{b_2(\alpha)} \mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Se supondrán las condiciones dadas en [21]:

Hipotesis 2.2 I). b_1 y b_2 son funciones absolutamente integrables en el intervalo $[0, 1]$ y satisfacen $\hat{B}_1(s) \neq 0$ y $\hat{B}_2(s) \neq 0$ para $\text{Re}(s) > 0$, i.e., $\hat{B}_1(s) = \int_0^1 b_1(\alpha) s^\alpha d\alpha$ y $\hat{B}_2(s) = \int_0^1 b_2(\beta) s^\beta d\beta$ son funciones Hurwitz en \mathbb{C}^+ ,

II). $b_1, b_2 \in L^1(\mathbb{R}^+)$,

III). y es tal que $y^{(\alpha)} < M$ para $t \in \mathbb{R}^+$ para una constante positiva M y para cada $\alpha \in [0, 1]$.

2. PRESERVACIÓN EN SISTEMAS FRACCIONARIOS

Nota 2.10 Note que si $\hat{B}_1(s)/\hat{B}_2(s)$ es una función donde $\hat{B}_1(s)$ y $\hat{B}_2(s)$ son funciones que satisfacen las condiciones I) y II). Entonces esta función en general no es una función λ -HPC, pero podemos considerar funciones λ -HPC, que satisfacen las condiciones I) y II).

Nota 2.11 Hay que notar que si se toma $b_2(\beta) = \delta(\beta)$ (la función delta), entonces el sistema (2.18) se reduce a un tipo de sistemas más usual, llamado DOLTIS en [112]

$$\begin{aligned} D_t^{b_1(\alpha)} \mathbf{x}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Definición 2.9 [112, 39] Un sistema de orden distribuido $P(s)$ definido por su respuesta al impulso $p(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P(s)\}$ es BIBO (entrada acotada-salida acotada) estable si y sólo si $\forall \mathbf{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^+)^{n \times n}$, entonces $p * \mathbf{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^+)^{n \times n}$. $*$ es el producto convolución y $L^\infty(\mathbb{R}^+)^{n \times n}$ es el espacio de Lebesgue de las funciones matriciales medibles p tales que $\text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}^+} \|p(t)\| < \infty$.

Para el siguiente resultado, se usa la siguiente notación: $D_t^{b_1(\alpha)} x(t) = \int_0^1 b_1(\alpha) x^{(\alpha)}(t) d\alpha$, $D_t^{b_2(\beta)} x(t) = \int_0^1 b_2(\beta) x^{(\beta)}(t) d\beta$, $\hat{B}_1(s) = \int_0^1 b_1(\alpha) s^\alpha d\alpha$ y $\hat{B}_2(s) = \int_0^1 b_2(\beta) s^\beta d\beta$.

Definición 2.10 La función $\det \left[\hat{B}_1(s)/\hat{B}_2(s)I - A \right]$ es la función característica de la matriz A con respecto a la función de distribución $B_1(s)/B_2(s)$, donde $\hat{B}_1(s) = \int_0^1 b_1(\alpha) s^\alpha d\alpha$, $\hat{B}_2(s) = \int_0^1 b_2(\beta) s^\beta d\beta$ son las funciones de distribución respecto a las funciones de densidad $b_1(\alpha) \geq 0$ y $b_2(\beta) \geq 0$.

Teorema 2.2 El sistema (2.18) es BIBO estable si y sólo si todas las raíces de la función característica $\det \left[\hat{B}_1(s)/\hat{B}_2(s)I - A \right]$ de la matriz A respecto a la función de distribución $\hat{B}_1(s)/\hat{B}_2(s)$ tienen partes reales estrictamente negativas.

Prueba. Tomando la transformada de Laplace en ambos lados de la primer ecuación en (2.18) se obtiene

$$\hat{B}_1(s)\mathbf{X}(s) - \frac{\hat{B}_1(s)}{s}\mathbf{x}(0) = A \left[\hat{B}_2(s)\mathbf{X}(s) - \frac{\hat{B}_2(s)}{s}\mathbf{x}(0) \right] + B\mathbf{U}(s)$$

resolviendo para $\mathbf{X}(s)$ obtenemos

$$\mathbf{X}(s) = \left[\hat{B}_1(s)I - A\hat{B}_2(s) \right]^{-1} \left(\frac{1}{s} \left[\hat{B}_1(s)I - A\hat{B}_2(s) \right] \mathbf{x}(0) + B\mathbf{U}(s) \right). \quad (2.19)$$

Ahora se toma la transformada de Laplace en ambos lados de la segunda ecuación en (2.18)

$$\mathbf{Y}(s) = C \left[\hat{B}_2(s)\mathbf{X}(s) - \frac{\hat{B}_2(s)}{s}\mathbf{x}(0) \right] + D\mathbf{U}(s). \quad (2.20)$$

2.4. ESTABILIZACIÓN Y PASIFICACIÓN DE DOLTIS USANDO MÉTODOS DE PRESERVACIÓN

Sustituyendo la ecuación (2.19) en la ecuación (2.20) y se asume sin pérdida de generalidad que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, se obtiene la matriz de funciones de transferencia del sistema (2.18)

$$\mathbf{Y}(s) = \left(C \left[\begin{pmatrix} \hat{B}_1(s) \\ \hat{B}_2(s) \end{pmatrix} I - A \right]^{-1} B + D \right) \mathbf{U}(s).$$

Observe que la hipótesis que todas las raíces de la función característica $\det \left[\begin{pmatrix} \hat{B}_1(s) \\ \hat{B}_2(s) \end{pmatrix} I - A \right]$ de la matriz A respecto a la función de distribución $\hat{B}_1(s)/\hat{B}_2(s)$ tienen partes reales estrictamente negativas, es equivalente a la estabilidad BIBO del sistema (2.18). Por el Teoremas 3.10 y 4.4 en [39], dado que la condición que todas las raíces de la función característica $\det \left[\begin{pmatrix} \hat{B}_1(s) \\ \hat{B}_2(s) \end{pmatrix} I - A \right]$ de la matriz A respecto a la función de distribución $\hat{B}_1(s)/\hat{B}_2(s)$ tengan partes reales estrictamente negativas es equivalente a

$$\inf_{\operatorname{Re}(s) > 0} \left| \det \left[\begin{pmatrix} \hat{B}_1(s) \\ \hat{B}_2(s) \end{pmatrix} I - A \right] \right| > 0,$$

y esta condición asegura que la convolución

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ C \left[\begin{pmatrix} \hat{B}_1(s) \\ \hat{B}_2(s) \end{pmatrix} I - A \right]^{-1} B + D \right\} * \mathbf{u}(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^+)^{n \times n}$$

$\forall \mathbf{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^+)^{n \times n}$. \square

Nota 2.12 El Teorema 2.2 generaliza al Teorema 4.1 en [75]. Además, note que en el Teorema 2.2, la matriz A no necesita ser una matriz estable, y la función $\frac{\hat{B}_1(s)}{\hat{B}_2(s)}$ no necesita ser una función λ -HPC.

Para los siguientes resultados se asume que el sistema (2.21) es una realización mínima del sistema.

Teorema 2.3 Considere al sistema lineal autónomo (LTI)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t). \end{aligned} \tag{2.21}$$

- a). Si el sistema (2.21) es estable y $\frac{\hat{B}_1(s)}{\hat{B}_2(s)}$ es una función λ -HPC donde $\hat{B}_2(s)$ tiene un número finito de ceros en I_λ , entonces los elementos del sistema en matrices de funciones de transferencia (2.18) son funciones Hurwitz en \bar{R}_λ , i.e., la matriz de transferencia para el sistema (2.18) es una matriz Hurwitz en \bar{R}_λ .
- b). Si el sistema (2.21) es estabilizable mediante un control con retroalimentación de estado estática $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$ y $\frac{\hat{B}_1(s)}{\hat{B}_2(s)}$ es una función λ -HPC donde $\hat{B}_2(s)$ tiene un número finito de ceros en I_λ , entonces el sistema (2.18) es estabilizable en \bar{R}_λ mediante el control con retroalimentación de estado estática $\mathbf{u}(t) = KD_t^{b_2(\alpha)}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$.

2. PRESERVACIÓN EN SISTEMAS FRACCIONARIOS

c). Si existe una ganancia de retroalimentación estática de salida $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$ para el sistema (2.21) con la matriz $D = 0_{m \times r}$, y $\frac{\hat{B}_1(s)}{\hat{B}_2(s)}$ es una función λ -HPC donde $\hat{B}_2(s)$ tiene un número finito de ceros sobre I_λ , entonces existe un control estabilizante de retroalimentación de salida $\mathbf{u}(t) = KD_t^{b_2(\alpha)}\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$ en \bar{R}_λ , para el sistema (2.18).

Prueba. a) Considere la función de transferencia $H(s) = \left(C \left[\begin{pmatrix} \hat{B}_1(s) \\ \hat{B}_2(s) \end{pmatrix} I - A \right]^{-1} B + D \right)$ del sistema (2.18). Note que $H(s)$ es la composición de la función de transferencia $C[sI - A]^{-1}B + D \in \mathbf{RH}^\infty$ y la función λ -HPC, $\frac{\hat{B}_1(s)}{\hat{B}_2(s)}$. Dado que todas las raíces de la función característica $\det[sI - A]$ de la matriz A tienen parte real negativa, usando el Lema 2.2 aplicado al sistema $p(s) = C[sI - A]^{-1}B + D \in \mathbf{RH}^\infty$ con la función λ -HPC $\frac{\hat{B}_1(s)}{\hat{B}_2(s)}$, se concluye que los elementos de la matriz de funciones de transferencia del sistema (2.18) son funciones de Hurwitz en \bar{R}_λ , por el Corolario 2.2.

b) Si se usa el control de retroalimentación de estado $\mathbf{u}(t) = KD_t^{b_2(\alpha)}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$ para el sistema (2.18), se obtiene

$$\begin{aligned} D_t^{b_1(\alpha)}\mathbf{x}(t) &= (A + BK)D_t^{b_2(\alpha)}\mathbf{x}(t) + B\mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= (C + DK)D_t^{b_2(\alpha)}\mathbf{x}(t) + D\mathbf{v}(t). \end{aligned} \quad (2.22)$$

la función de transferencia en lazo cerrado de este sistema es

$$\mathbf{Y}(s) = \left((C + DK) \left[\begin{pmatrix} \hat{B}_1(s) \\ \hat{B}_2(s) \end{pmatrix} I - (A + BK) \right]^{-1} B + D \right) \mathbf{U}(s), \quad (2.23)$$

Dado que la función de transferencia del sistema (2.21) con la ganancia de retroalimentación estática de salida estabilizante $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$ es

$$\mathbf{Y}(s) = ((C + DK)[sI - (A + BK)]^{-1}B + D) \mathbf{U}(s) \quad (2.24)$$

y la función de transferencia (2.23) es la composición de la función de transferencia (2.24) con la función λ -HPC $\frac{\hat{B}_1(s)}{\hat{B}_2(s)}$. Por el Corolario 2.2, se tiene que se cumple el resultado.

Para la prueba del inciso c) se procede en forma similar que para el inciso b), pero usando el control con retroalimentación estática de salida $\mathbf{u}(t) = KD_t^{b_2(\alpha)}\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$ para el sistema (2.18). El sistema resultante en lazo cerrado es

$$\begin{aligned} D_t^{b_1(\alpha)}\mathbf{x}(t) &= (A + BKC)D_t^{b_2(\alpha)}\mathbf{x}(t) + B\mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= CD_t^{b_2(\alpha)}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

y la función de transferencia en lazo cerrado es

$$\mathbf{Y}(s) = C \left[\begin{pmatrix} \hat{B}_1(s) \\ \hat{B}_2(s) \end{pmatrix} I - (A + BKC) \right]^{-1} B \mathbf{U}(s). \quad (2.26)$$

2.4. ESTABILIZACIÓN Y PASIFICACIÓN DE DOLTIS USANDO MÉTODOS DE PRESERVACIÓN

Por el Corolario 2.2, el sistema (2.26) es una matriz Hurwitz en \bar{R}_λ . \square

El siguiente corolario es consecuencia del Corolario 2.2, la Nota 2.8 y la Nota 2.9.

Corolario 2.4 *Considere al sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) (2.21) donde $\frac{N_h(s)}{D_h(s)}$ es una función SPR0, $\frac{\hat{B}_1(s)}{\hat{B}_2(s)} = \frac{N_h(s^{\frac{1}{\lambda}})}{D_h(s^{\frac{1}{\lambda}})}$ y $\lambda \in \mathbb{Z}^+$ con $\lambda > n$. Entonces,*

- a). *Si el sistema (2.21) es estable, el sistema (2.18) es una matriz Hurwitz en \bar{R}_λ .*
- b). *Si el sistema (2.21) es estabilizable mediante un control con retroalimentación estática de estado $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$, el sistema (2.18) es estabilizable en \bar{R}_λ mediante el control con retroalimentación de estado $\mathbf{u}(t) = KD_t^{b_2(\alpha)}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$.*
- c). *Si existe una ganancia de retroalimentación estática de salida estabilizante $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$ para el sistema (2.21) con la matriz $D = 0_{m \times r}$, entonces existe un control con retroalimentación de salida $\mathbf{u}(t) = KD_t^{b_2(\alpha)}\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$ en \bar{R}_λ , para el sistema (2.18).*

Para el siguiente resultado, asumimos que $\hat{B}_2(s)$ tiene un número finito de ceros en I_λ .

Corolario 2.5 *Considere el sistema lineal autónomo (LTI) (2.21).*

- a). *Si existe una ganancia de retroalimentación estática de salida $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$ para el sistema (2.21) con una matriz $D = 0_{m \times r}$, tal que el sistema en lazo cerrado es SSPR y $\frac{\hat{B}_1(s)}{\hat{B}_2(s)}$ es una función λ -HPC que satisface las condiciones del Teorema 2.1, entonces existe un control de retroalimentación de salida $\mathbf{u}(t) = KD_t^{b_2(\alpha)}\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$ para el sistema (2.18) tal que el sistema resultante en lazo cerrado es un sistema λ -SSPR.*
- b). *Si existe una ganancia de retroalimentación de salida estática $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$ para el sistema (2.21) con la matriz $D = 0_{m \times r}$, tal sistema en lazo cerrado es un sistema SPR y $\frac{\hat{B}_1(s)}{\hat{B}_2(s)} = \frac{N_h(s^{\frac{1}{\lambda}})}{D_h(s^{\frac{1}{\lambda}})}$ es una función λ -HPC, donde $\frac{N_h(s)}{D_h(s)}$ es una función SPR0 que satisface las condiciones del Corolario 2.3, entonces existe un control de retroalimentación de salida $\mathbf{u}(t) = KD_t^{b_2(\alpha)}\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$ para el sistema (2.18) tal que el sistema resultante en lazo cerrado es un sistema λ -SSPR.*

Prueba. a) Si existe una ganancia de retroalimentación estática de salida $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$ para el sistema (2.21) con la matriz $D = 0_{m \times r}$, tal que el sistema en lazo cerrado es SPR y $\frac{\hat{B}_1(s)}{\hat{B}_2(s)}$ es una función λ -HPC, entonces la función de transferencia del sistema en lazo cerrado (2.26) es λ -SSPR, por el Teorema 2.1.

b) La prueba de este inciso es semejante y es consecuencia del Corolario 2.3. \square

2. PRESERVACIÓN EN SISTEMAS FRACCIONARIOS

Nota 2.13 Los resultados del Teorema 2.3 al Corolario 2.5, permiten extender las metodologías de estabilización y pasificación conocidas para los sistemas del tipo (2.21) [92, 42, 79, 34], a los sistemas lineales de orden fraccionario variable (2.18).

A continuación se obtiene un resultado sobre la estabilización de sistemas lineales de orden fraccionario variable, basado en el Teorema 2.2. Este resultado requiere el siguiente lema.

Lema 2.5 Para el sistema (2.18) los siguientes enunciados son equivalentes:

- a). El sistema (2.18) es BIBO estable.
 b). La función de distribución $\hat{B}_1(s)/\hat{B}_2(s)$ satisface

$$\left(\hat{B}_1/\hat{B}_2\right)(\overline{\mathbb{C}^+}) \cap \sigma_A = \emptyset$$

donde el conjunto de valores característicos de A es denotado por $\sigma_A = \{r_1, \dots, r_p\}$.

- c). Todas las raíces de la ecuación

$$\hat{B}_1(s) - r_j \hat{B}_2(s) = 0,$$

se encuentran en \mathbb{C}^- para cada $r_j \in \sigma_A$.

Prueba. El inciso a) por el Teorema 2.2, establece que todas las raíces de la función característica $\det \left[\hat{B}_1(s)/\hat{B}_2(s)I - A \right]$ de la matriz A respecto a la función de distribución $\hat{B}_1(s)/\hat{B}_2(s)$ tienen partes reales negativas. Ahora consideremos la factorización $\det \left[\hat{B}_1(s)/\hat{B}_2(s)I - A \right] = \prod_{j=1}^p \left(\left(\hat{B}_1/\hat{B}_2 \right)(s) - r_j \right)$, donde el polinomio característico

de $\det [sI - A]$ está factorizado como $\prod_{j=1}^p (s - r_j)$. Éste es cero, si al menos algún factor

$\left(\left(\hat{B}_1/\hat{B}_2 \right)(s) - r_j \right) = 0$ para algún $j = 1, 2, \dots, p$. La condición $\left(\hat{B}_1/\hat{B}_2 \right)(\overline{\mathbb{C}^+}) \cap \sigma_A = \emptyset$ es equivalente a que los valores s_{jk} no estén en $\overline{\mathbb{C}^+}$, donde $\left(\hat{B}_1/\hat{B}_2 \right)(s_{jk}) = r_j$ para cada $r_j \in \sigma_A$. Por lo tanto, todos los valores s_{jk} están en \mathbb{C}^- y el sistema es estable para el inciso a). En consecuencia a) \Leftrightarrow b).

El inciso b) requiere que los valores s_{jk} donde $\left(\hat{B}_1/\hat{B}_2 \right)(s_{jk}) = r_j$ para cada $r_j \in \sigma_A$, estén en \mathbb{C}^- . Equivalentemente, todas las raíces de las ecuaciones

$$\hat{B}_1(s) - r_j \hat{B}_2(s) = 0,$$

están en \mathbb{C}^- para cada $r_j \in \sigma_A$. En consecuencia b) \Leftrightarrow c). \square

2.4. ESTABILIZACIÓN Y PASIFICACIÓN DE DOLTIS USANDO MÉTODOS DE PRESERVACIÓN

Teorema 2.4 *Supongamos b_1 y b_2 que satisfacen las condiciones I), II) y III).*

- a). *Supongamos también que existe un control por retroalimentación estática de estado $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$ para el sistema (2.21) tal que dicho control puede asignar los polos del sistema (2.22) de modo que todas las raíces de las ecuaciones*

$$\hat{B}_1(s) - \lambda_j \hat{B}_2(s) = 0, \quad (2.27)$$

estén en \mathbb{C}^- para cada valor característico λ_j de la matriz $A + BK$. Entonces el sistema (2.18) es BIBO estabilizable mediante el control por retroalimentación de estado $\mathbf{u}(t) = KD_t^{b_2(\alpha)}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$.

- b). *Supóngase que existe una ganancia de retroalimentación estática de salida $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$ para el sistema (2.21) con la matriz $D = 0_{m \times r}$ tal que este control puede asignar los polos al sistema (2.25) de modo que todas las raíces de las ecuaciones*

$$\hat{B}_1(s) - \eta_j \hat{B}_2(s) = 0, \quad (2.28)$$

están en \mathbb{C}^- para cada valor característico η_j de la matriz $A + BKC$. Entonces el sistema (2.18) es BIBO estabilizable mediante un control con retroalimentación de la salida $\mathbf{u}(t) = KD_t^{b_2(\alpha)}\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$.

Prueba. a) Dado que existe un control por retroalimentación estática de estado $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$ para el sistema (2.21) tal que dicho control puede asignar los polos del sistema (2.22) de modo que satisfacen la condición (2.27) para cada valor característico λ_j de la matriz $A + BK$. Entonces por el Lema 2.5 inciso a) y un procedimiento similar al utilizado en el inciso b) del Teorema 2.3, el sistema (2.22) es BIBO estable usando el control por retroalimentación de estado $\mathbf{u}(t) = KD_t^{b_2(\alpha)}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$.

La prueba del inciso b) es similar a la prueba del inciso a), pero usando la condición (2.28) para el sistema (2.25) con el Lema 2.5 inciso b) y un procedimiento semejante al usado en el inciso c) del Teorema 2.3. \square

Nota 2.14 *Este resultado es menos conservativo que el del Teorema 2.2. Este resultado extiende las técnicas conocidas para la ubicación de polos en sistemas LTI [25], a una clase de sistemas lineales de orden fraccionario variable (2.18) para funciones $\hat{B}_1(s)/\hat{B}_2(s)$ que no necesitan ser funciones λ -HPC. Sin embargo, el costo es que se pide asegurar que todas las raíces de las ecuaciones (2.27) y (2.28) estén en \mathbb{C}^- para los valores característicos de las matrices correspondientes. Ahora el problema es la ubicación de polos con restricciones.*

Nota 2.15 *En esta sección, cuando se toma $b_2(\beta) = \delta(\beta)$, entonces todos los controladores son estáticos.*

Aplicación de los criterios de Preservación

En esta sección se presentan dos ejemplos para ilustrar el posible uso de los métodos desarrollados para cada uno de los dos problemas atacados en este trabajo. En la sección 3.1 se presentan los 2 ejemplos relativos al primer problema y en la sección 3.2 los relacionados al segundo problema.

3.1. Ejemplos de preservación de estabilización y sincronización de FOS no lineales

3.1.1. Preservación de estabilización de sistemas fraccionarios de Lorenz

Sea el sistema de Lorenz con orden fraccionario conmensurable $\alpha = 0.99$, que puede ser escrito como [38]:

$$x^{(\alpha)} = Ax + g(x) + u = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\beta} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{bmatrix} - K_1x \quad (3.1)$$

con $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\bar{\beta} = 8/3$, y condiciones iniciales $x(0) = [-9 \ -5 \ 14]^T$. En [97] se menciona que este sistema es caótico.

El objetivo es estabilizar al sistema y después aplicar una modificación que cumpla las condiciones de la Proposición 2.1, para ilustrar la validez de los resultados analíticos.

Para hacer esto, se escoge $u = -K_1x$. Con

$$J_{K_1} = \begin{bmatrix} -17 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} -5.1552 & 9.2338 & 0 \\ 25.8545 & 3.1552 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

3.1. EJEMPLOS DE PRESERVACIÓN DE ESTABILIZACIÓN Y SINCRONIZACIÓN DE FOS NO LINEALES

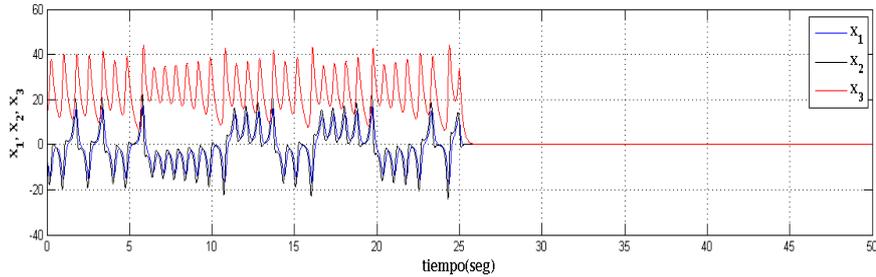
los valores característicos de la nueva matriz $A - K_1$ son $\lambda_1 \approx -5.827$, $\lambda_2 \approx -3.172$ y $\lambda_3 \approx -6.666$, con esto y el hecho que $g(x)$ cumple las condiciones del Teorema 1.3 (como se ha demostrado en [109]) se obtiene que el origen es una solución estable.

Ahora se quiere averiguar que sucede si se propone la modificación $\alpha\beta = 0.985$, $\beta \approx 0.9949$, $c = 0.8$, y

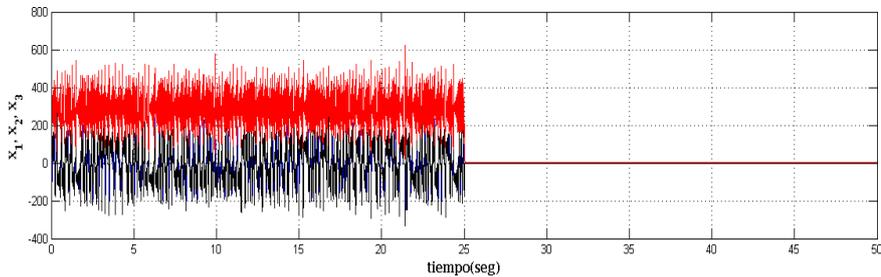
$$J_M = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 10.4 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 10.2595 & -0.5771 & 0 \\ -1.6159 & 9.7403 & 0 \\ 0 & 0 & 10.4 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

se puede verificar facilmente que M cumple las condiciones de la Proposición 2.1. Los valores característicos del sistema modificado $M(A - K_1)$ son $\lambda_1 \approx -64.105$, $\lambda_2 \approx -28.550$ y $\lambda_3 \approx -69.333$. Dado que estos valores característicos satisfacen las condiciones del Teorema 1.3, y que $0.8g(x)$ también satisface el resto de las condiciones, el origen del sistema modificado controlado es también una solución estable.

En las Figuras 3.1 y 3.4 el paso de simulación fue 0.005s y el tiempo de simulación 50s. En los primeros 25s sólo se tenía al sistema original homogéneo ($u = 0$), y para los últimos 25s se activo al control u , para los sistemas original y modificado, respectivamente.

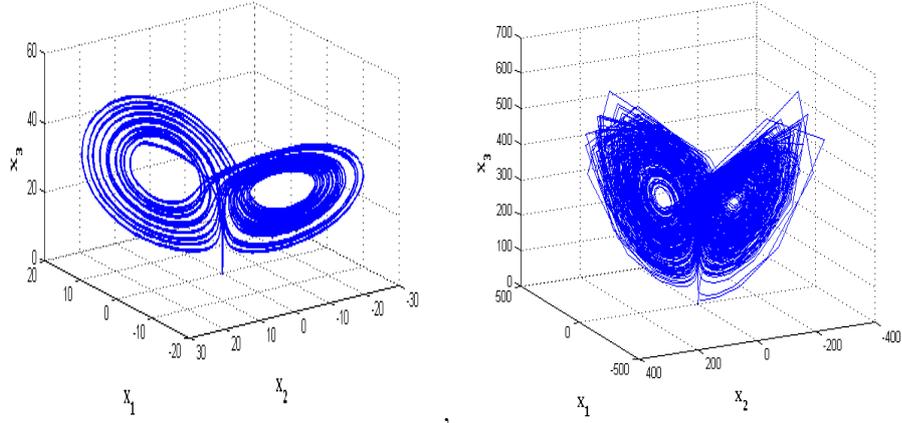


(a) El sistema original $x^{(\alpha)} = (A - K)x + g(x)$



(b) El sistema modificado $x^{(\alpha)} = M(A - K)x + g(x)$

Figura 3.1: Gráfica de los estados vs tiempo



(a) El sistema $x^{(\alpha)} = (A - K)x + g(x)$ (b) El sistema $x^{(\alpha)} = M(A - K)x + g(x)$

Figura 3.2: Plano fase de los sistemas original y modificado

3.1.2. Preservación de sincronización práctica para sistemas fraccionarios de Chen

En este ejemplo se hace la sincronización de dos sistemas fraccionarios de Chen con parámetros y ordenes idénticos, pero distintas condiciones iniciales, debido a estas consideraciones se tendrá que $A_{\mathcal{M}} = A_{\mathcal{S}}$, y por lo tanto no se usan los índices para las matrices A y M .

Se usa la estructura del sistema de Chen con orden fraccionario α tal como ha sido presentado por [52]. Para el sistema esclavo se tiene:

$$x_{\mathcal{S}}^{(\alpha)} = Ax_{\mathcal{S}} + g(x_{\mathcal{S}}) = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ d - a & d & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} x_{\mathcal{S}} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_{S_1}x_{S_3} \\ x_{S_1}x_{S_2} \end{bmatrix} + w \quad (3.4)$$

con w tal como se ha definido en (2.16), $x_{\mathcal{S}} = [x_{S_1} \ x_{S_2} \ x_{S_3}]^T$, $a = 35$, $b = 3$, $d = 28$, y $\alpha = 0.975$, y condiciones iniciales $x_{\mathcal{S}}(0) = [3 \ 0 \ 10]^T$.

Para el sistema maestro se toma

$$x_{\mathcal{M}}^{(\alpha)} = Ax_{\mathcal{M}} + g(x_{\mathcal{M}}) = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ d - a & d & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} x_{\mathcal{M}} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_{M_1}x_{M_3} \\ x_{M_1}x_{M_2} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

con $x_{\mathcal{M}} = [x_{M_1} \ x_{M_2} \ x_{M_3}]^T$, $a = 35$, $b = 3$, $d = 28$, $\alpha = 0.975$ y condiciones iniciales $x_{\mathcal{M}}(0) = [-9 \ -5 \ 14]^T$.

Ambos, el sistema maestro y el esclavo son caóticos, respecto a las condiciones dadas

3.1. EJEMPLOS DE PRESERVACIÓN DE ESTABILIZACIÓN Y SINCRONIZACIÓN DE FOS NO LINEALES

en [97]. Para la ley de control (2.13) se tiene

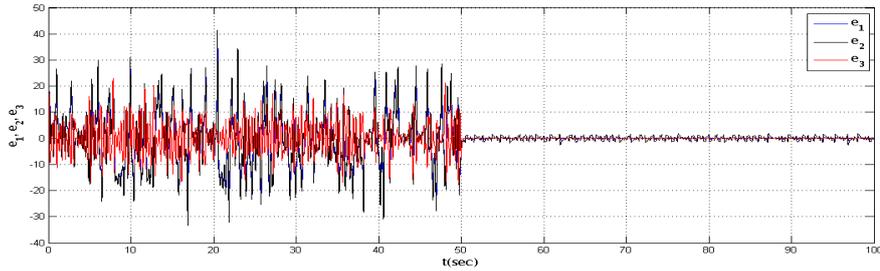
$$J_{K_2} = \begin{bmatrix} -26 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -30.1130 & 34.5700 & 0 \\ -6.9140 & 32.1130 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

y para la modificación se toma $c = 0.9$, $\alpha\beta = 0.96$, $\beta \approx 0.9846$ y

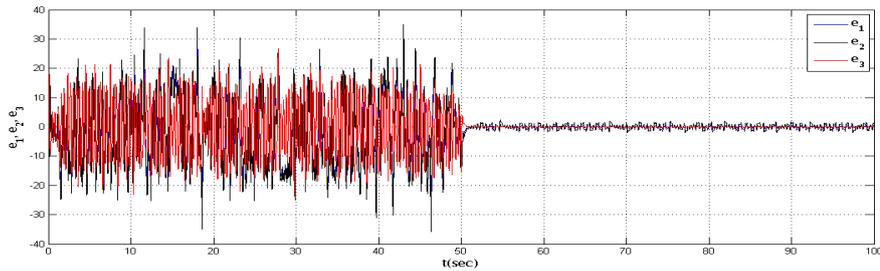
$$J_M = \begin{bmatrix} 1.075 & 0 & 0 \\ 0 & 0.955 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1.0841 & -0.0768 & 0 \\ 0.0154 & 0.9459 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Con K_2 como se propuso, se garantiza que el sistema del error de sincronización sin modificación satisface las condiciones del Teorema 1.3. Se puede verificar facilmente que M y $0.9g(x)$ cumplen las condiciones de la Proposición 2.1, de tal forma que se puede asegurar que este es un ejemplo de preservación de sincronización.

Nuevamente, el paso y el tiempo de simulación fueron $0.0028s$ y $50s$, respectivamente. En los primeros $25s$ el sistema era el autónomo ($w = 0$), y para los últimos $25s$ se activó la ley de control w , para los sistemas original y modificado.



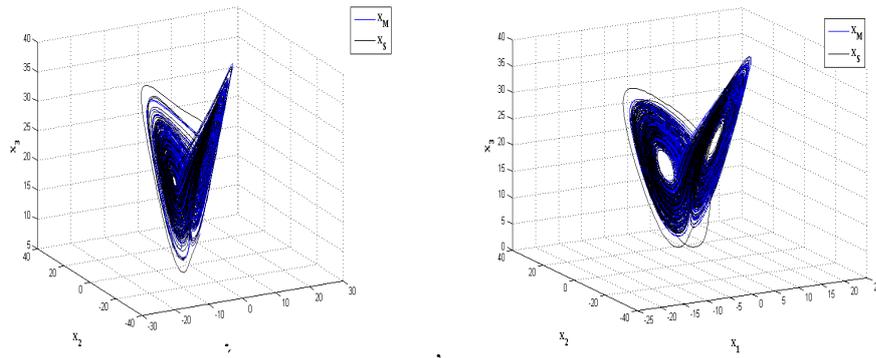
(a) Error de Sincronización de los sistemas originales



(b) Error de Sincronización de los sistemas modificados

Figura 3.3: Gráfica de errores de sincronización con la ley de control activada a los $t = 25s$

En la Figura 3.3, se puede observar como la aplicación de la ley de control, con la misma K_2 , estabiliza al origen de los sistemas dinámicos fraccionarios de error de sincronización de los sistemas originales y de los sistemas modificados.



(a) La sincronización de los sistemas originales (b) La sincronización de los sistemas modificados

Figura 3.4: *Plano fase* de la sincronización de los sistemas originales y modificados; los sistemas maestros aparecen en azul, y los sistemas esclavos en negro, la ley de control es aplicada a los $t = 50s$.

En la Figura 3.4, se puede observar la forma en la que el sistema maestro *sigue* al sistema maestro para los sistemas originales y para los sistemas modificados, con la misma K_2 .

Después de hacer varias simulaciones se ha observado que bajo variaciones muy grandes en los parámetros las transformaciones no parecieran preservar el caos. Esto limita las variaciones posibles en las transformaciones usadas si uno está interesado en representar caos para la simulación, puesto que como es bien conocido, el caos en sistemas dinámicos es muy sensible a variaciones en los parámetros.

3.2. Estabilización de DOLTIS usando métodos de preservación

Los resultados sobre pasificación obtenidos claramente aplican para sistemas de la siguiente familia

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(\alpha)}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

donde $\alpha = \lambda^{-1}$ con $\lambda \in \mathbb{Z}^+$. También es posible mostrar que estos resultados aplican cuando $\alpha \in [0, 1]$.

El siguiente es un caso aún más interesante.

3.2.1. Ejemplo 1

Considere el caso cuando $b_1(\alpha) = \sum_{k=0}^n c_k \delta(\alpha - k\beta_1)$, ($0 < n\beta_1 < 1$) y $b_2(\alpha) = \sum_{k=0}^m d_k \delta(\alpha - k\beta_2)$, ($0 < m\beta_2 < 1$). En este caso el sistema 2.18 toma la siguiente forma en el dominio de la frecuencia

$$\begin{aligned} & c_n \mathbf{x}^{(n\beta_1)}(t) + c_{n-1} \mathbf{x}^{((n-1)\beta_1)}(t) + \cdots + c_1 \mathbf{x}^{(\beta_1)}(t) + c_0 \mathbf{x}(t) = \\ & A [d_m \mathbf{x}^{(m\beta_2)}(t) + d_{m-1} \mathbf{x}^{((m-1)\beta_2)}(t) + \cdots + d_1 \mathbf{x}^{(\beta_2)}(t) + d_0 \mathbf{x}(t)] + B \mathbf{u}(t) \\ & \mathbf{y}(t) = \\ & C [d_m \mathbf{x}^{(m\beta_2)}(t) + d_{m-1} \mathbf{x}^{((m-1)\beta_2)}(t) + \cdots + d_1 \mathbf{x}^{(\beta_2)}(t) + d_0 \mathbf{x}(t)] + D \mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Esta familia de sistemas, incluye el caso 4 en el capítulo dos del libro [81], al tomar $m = 0$, los llamados sistemas lineales autónomos de orden fraccionario distribuido (DOLTIS).

En particular, se considera al sistema (3.8) con los parámetros del ejemplo en [92] donde

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & D &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

y el sistema (3.8) toma la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(\frac{2}{3})}(t) + 2\mathbf{x}^{(\frac{1}{3})}(t) + 2\mathbf{x}(t) &= A [\mathbf{x}^{(\frac{2}{3})}(t) + 3\mathbf{x}^{(\frac{1}{3})}(t) + \mathbf{x}(t)] + B \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C [\mathbf{x}^{(\frac{2}{3})}(t) + 3\mathbf{x}^{(\frac{1}{3})}(t) + \mathbf{x}(t)] + D \mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

En este caso la función de distribución $\hat{B}_1(s)/\hat{B}_2(s)$ está dada por

$$\hat{B}_1(s)/\hat{B}_2(s) = \frac{s^{\frac{2}{3}} + 2s^{\frac{1}{3}} + 2}{s^{\frac{2}{3}} + 3s^{\frac{1}{3}} + 1}. \quad (3.10)$$

Tomando en cuenta que la función $\frac{s^2+2s+2}{s^2+3s+1}$ es una función SPR0, y que por la Nota 2.8 $\hat{B}_1(s)/\hat{B}_2(s)$ es una función 2-HPC. Se sabe que el control por retroalimentación estática de estado $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$ [92] con

$$K = \begin{pmatrix} -2 & -50 \end{pmatrix}$$

estabiliza al sistema LTI (2.21) [9], entonces por el Corolario 2.4, inciso b), el control por retroalimentación de estado $\mathbf{u}(t) = K D_t^{b_2(\alpha)} \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$ estabiliza en \bar{R}_3 al sistema (3.8). Para mostrar la estabilidad, se considera el polinomio característico en lazo cerrado del sistema LTI de orden entero (3.9) con la K dada por

$$p(s) = s^3 + 2s^2 + 27s + 50.$$

3. APLICACIÓN DE LOS CRITERIOS DE PRESERVACIÓN

Después de sustituir la función 3-HPC $\frac{s^{\frac{2}{3}}+2s^{\frac{1}{3}}+2}{s^{\frac{2}{3}}+3s^{\frac{1}{3}}+1}$ en el plinomio $p(s)$, se obtiene

$$\frac{3434s + 80s^2 + 892\sqrt[3]{s} + 2553s^{\frac{2}{3}} + 2235s^{\frac{4}{3}} + 686s^{\frac{5}{3}} + 120}{\left(3\sqrt[3]{s} + s^{\frac{2}{3}} + 1\right)^3},$$

las raíces del polinomio numerador $3434x^3 + 80x^6 + 892x + 2553x^2 + 2235x^4 + 686x^5 + 120$ con $x = s^{\frac{1}{3}}$ están en \mathbb{C}^- , y son

$$\begin{aligned} & -0.686\ 23 \\ & -1.965\ 2 \\ & -0.389\ 71 + 0.118\ 11i \\ & -0.389\ 71 - 0.118\ 11i \\ & -2.572\ 1 + 0.303\ 58i \\ & -2.572\ 1 - 0.303\ 58i \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} (-0.389\ 71 \pm 0.118\ 11i)^3 &= -4.2877 \times 10^{-2} \pm 5.2166 \times 10^{-2}i = s_{1,2} \\ (-2.572\ 1 \pm 0.303\ 58i)^3 &= -16.305 \pm 5.997\ 2i = s_{3,4} \\ (-0.686\ 23)^3 &= -0.323\ 15 = s_5 \\ (-1.965\ 2)^3 &= -7.589\ 6 = s_6 \end{aligned}$$

y tomando el argumento de los números complejos anteriores, se obtiene

$$\begin{aligned} |\arg(-4.2877 \times 10^{-2} \pm 5.2166 \times 10^{-2}i)| &= 2.258\ 8 \\ |\arg(-16.305 \pm 5.997\ 2i)| &= 2.789\ 1 \\ |\arg(-0.323\ 15)| &= \pi \\ |\arg(-7.589\ 6)| &= \pi, \end{aligned}$$

y en todos casos $|\arg(s_i)| > \frac{\pi}{6}$ para $i = 1, \dots, 6$, entonces por el criterio de Matignon el sistema de lazo cerrado (3.8) con los parámetros (3.9) es estable o equivalentemente Hurwitz en \bar{R}_3 . en consecuencia, el control por retroalimentación de estado $\mathbf{u}(t) = KD_t^{b_2(\alpha)}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$ estabiliza en \bar{R}_3 , al sistema (3.8) con los parámetros (3.9).

3.2.2. Ejemplo 2

Ahora considere al sistema (3.8) con los siguientes parámetros

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & D &= 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Este sistema no es SPR y no es estable. Nuevamente, se toma la función 3-HPC (3.10). Basándose en la metodología propuesta en [42] para el siguiente sistema LTI de orden entero

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x},\end{aligned}$$

y usando el control por retroalimentación estática de salida $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$ con

$$K = \begin{pmatrix} 1.1958 & -0.031318 \\ -0.031318 & 1.4157 \end{pmatrix}.$$

El sistema resultante en lazo cerrado es el siguiente sistema SPR

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} -3.5561 & -1.3603 & -1.1645 \\ -8.434 & -6.0737 & -2.7134 \\ -2.3217 & 0.6469 & -2.3844 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x},\end{aligned}\tag{3.12}$$

donde se usa la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 5.5397 & -1.2698 & 2.2698 \\ -1.2698 & 1.6349 & -0.6349 \\ 2.2698 & -0.6349 & 1.6349 \end{pmatrix}$$

en el Lema 1 sobre funciones SPR, en [42]. La matriz de transferencia del sistema (3.12) en lazo cerrado es

$$H(s) = \begin{pmatrix} \frac{7s^2+23.08s+11.57}{s^3+12.01s^2+32.14s+16.18} & \frac{3s^2+9.157s+5.345}{s^3+12.01s^2+32.14s+16.18} \\ \frac{3s^2+8.1s-2.655}{s^3+12.01s^2+32.14s+16.18} & \frac{2s^2+10.98s+14.15}{s^3+12.01s^2+32.14s+16.18} \end{pmatrix}\tag{3.13}$$

Finalmente, por el Corolario 2.5, el control por retroalimentación de salida $\mathbf{u}(t) = KD_t^{b_2(\alpha)}\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$ para el sistema (3.8) con los parámetros (3.11) hace que el sistema en lazo cerrado sea un sistema 3-SSPR. Se procede a verificar si se cumplen los enunciados del Corolario 2.3, para el sistema (3.8) en lazo cerrado con los parámetros (3.11). Sustituyendo (3.10) en (3.13), se obtiene la siguiente matriz de transferencia

$$H \left(\frac{s^{\frac{2}{3}} + 2s^{\frac{1}{3}} + 2}{s^{\frac{2}{3}} + 3s^{\frac{1}{3}} + 1} \right) = \begin{pmatrix} a(s) & b(s) \\ c(s) & d(s) \end{pmatrix}$$

3. APLICACIÓN DE LOS CRITERIOS DE PRESERVACIÓN

donde

$$\begin{aligned}
 a(s) &= \frac{1.6959 \times 10^5 s + 4165.0 s^2 + 56725. \sqrt[3]{s} + 1.4069 \times 10^5 s^{\frac{2}{3}} + 1.0711 \times 10^5 s^{\frac{4}{3}} + 33777. s^{\frac{5}{3}} + 8573.0}{2.4781 \times 10^5 s + 6133.0 s^2 + 85978. \sqrt[3]{s} + 2.0787 \times 10^5 s^{\frac{2}{3}} + 1.5591 \times 10^5 s^{\frac{4}{3}} + 49281. s^{\frac{5}{3}} + 13650.0} \\
 b(s) &= \frac{7.1481 \times 10^5 s + 17502. s^2 + 2.363 \times 10^5 \sqrt[3]{s} + 5.8885 \times 10^5 s^{\frac{2}{3}} + 4.5228 \times 10^5 s^{\frac{4}{3}} + 1.4236 \times 10^5 s^{\frac{5}{3}} + 35659.}{2.4781 \times 10^6 s + 61330.0 s^2 + 8.5978 \times 10^5 \sqrt[3]{s} + 2.0787 \times 10^6 s^{\frac{2}{3}} + 1.5591 \times 10^6 s^{\frac{4}{3}} + 4.9281 \times 10^5 s^{\frac{5}{3}} + 13650.0} \\
 c(s) &= \frac{62505. s + 1689.0 s^2 + 29901. \sqrt[3]{s} + 62370.0 s^{\frac{2}{3}} + 37170.0 s^{\frac{4}{3}} + 12381. s^{\frac{5}{3}} + 5109.0}{2.4781 \times 10^5 s + 6133.0 s^2 + 85978. \sqrt[3]{s} + 2.0787 \times 10^5 s^{\frac{2}{3}} + 1.5591 \times 10^5 s^{\frac{4}{3}} + 49281. s^{\frac{5}{3}} + 13650.0} \\
 d(s) &= \frac{1.1480 \times 10^5 s + 2713.0 s^2 + 32107. \sqrt[3]{s} + 88080.0 s^{\frac{2}{3}} + 74100.0 s^{\frac{4}{3}} + 22919. s^{\frac{5}{3}} + 4411.0}{2.4781 \times 10^5 s + 6133.0 s^2 + 85978. \sqrt[3]{s} + 2.0787 \times 10^5 s^{\frac{2}{3}} + 1.5591 \times 10^5 s^{\frac{4}{3}} + 49281. s^{\frac{5}{3}} + 13650.0}
 \end{aligned}$$

a) El denominador polinomial común de la matriz

$$H \left(\frac{s^{\frac{2}{3}} + 2s^{\frac{1}{3}} + 2}{s^{\frac{2}{3}} + 3s^{\frac{1}{3}} + 1} \right)$$

en $x = s^{\frac{1}{3}}$ es $2478.1x^3 + 859.78x + 2078.7x^2 + 1559.1x^4 + 492.81x^5 + 61.33x^6 + 136.5$ y sus raíces son

$$\begin{aligned}
 (s_1)^3 &= -2.1584 \\
 (s_2)^3 &= -0.57845 \\
 (s_3)^3 &= -2.447 \\
 (s_4)^3 &= -0.45343 \\
 (s_5)^3 &= -1.199 + 0.41102i \\
 (s_6)^3 &= -1.199 - 0.41102i
 \end{aligned}$$

Ahora tomando $s = x^3$ para cada raíz, se puede verificar que $|\arg(s_i)| > \frac{\pi}{6}$ para $i = 1, \dots, 6$, entonces por el criterio de Matignon el sistema (3.8) en lazo cerrado con la ganancia del control K , donde los parámetros del sistema son (3.12), es estable o equivalentemente Hurwitz en \bar{R}_3 . Para el inciso b), se considera a la matriz

$$\Pi \left(\frac{s^{\frac{2}{3}} + 2s^{\frac{1}{3}} + 2}{s^{\frac{2}{3}} + 3s^{\frac{1}{3}} + 1} \right) = H \left(\frac{s^{\frac{2}{3}} + 2s^{\frac{1}{3}} + 2}{s^{\frac{2}{3}} + 3s^{\frac{1}{3}} + 1} \right) + H^T \left(\frac{\bar{s}^{\frac{2}{3}} + 2\bar{s}^{\frac{1}{3}} + 2}{\bar{s}^{\frac{2}{3}} + 3\bar{s}^{\frac{1}{3}} + 1} \right)$$

evaluada en $s = xe^{\frac{\pi}{3}i}$ con $x \geq 0$ y evaluada en $s = xe^{-\frac{\pi}{3}i}$ con $x \geq 0$ i.e., evaluada en I_3 .

Esta matriz $\Pi \left(\frac{s^{\frac{5}{3}} + 2s^{\frac{1}{3}} + 2}{s^{\frac{5}{3}} + 3s^{\frac{1}{3}} + 1} \right) \Big|_{s=xe^{\frac{\pi i}{3}}} = \begin{pmatrix} a_{\Pi}(x) & b_{\Pi}(x) \\ c_{\Pi}(x) & d_{\Pi}(x) \end{pmatrix}$ esta dada por

$$\begin{aligned}
 a_{\Pi}(x) &= \frac{4165.0x^2e^{2(-\frac{1}{3}\pi i)} + 1.6959 \times 10^5 xe^{-\frac{1}{3}\pi i} + 56725. \sqrt[3]{xe^{-\frac{1}{3}\pi i}} + 1.4069 \times 10^5 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{2}{3}} + 1.0711 \times 10^5 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{4}{3}} + 33777. (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{5}{3}} + 85773.0}{6133.0x^2e^{2(-\frac{1}{3}\pi i)} + 2.4781 \times 10^5 xe^{-\frac{1}{3}\pi i} + 85978. \sqrt[3]{xe^{-\frac{1}{3}\pi i}} + 2.0787 \times 10^5 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{2}{3}} + 1.5591 \times 10^5 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{4}{3}} + 49281. (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{5}{3}} + 13650.0} \\
 &\quad + \frac{4165.0x^2e^{2(\frac{1}{3}\pi i)} + 1.6959 \times 10^5 xe^{\frac{1}{3}\pi i} + 56725. \sqrt[3]{xe^{\frac{1}{3}\pi i}} + 1.4069 \times 10^5 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{2}{3}} + 1.0711 \times 10^5 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{4}{3}} + 33777. (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{5}{3}} + 85773.0}{6133.0x^2e^{2(\frac{1}{3}\pi i)} + 2.4781 \times 10^5 xe^{\frac{1}{3}\pi i} + 85978. \sqrt[3]{xe^{\frac{1}{3}\pi i}} + 2.0787 \times 10^5 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{2}{3}} + 1.5591 \times 10^5 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{4}{3}} + 49281. (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{5}{3}} + 13650.0} \\
 b_{\Pi}(x) &= \frac{1689.0x^2e^{2(-\frac{1}{3}\pi i)} + 62505. xe^{-\frac{1}{3}\pi i} + 29901. \sqrt[3]{xe^{-\frac{1}{3}\pi i}} + 62370.0 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{2}{3}} + 37170.0 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{4}{3}} + 12381. (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{5}{3}} + 5109.0}{12266.x^2e^{2(-\frac{1}{3}\pi i)} + 4.9561 \times 10^5 xe^{-\frac{1}{3}\pi i} + 1.7196 \times 10^5 \sqrt[3]{xe^{-\frac{1}{3}\pi i}} + 4.1573 \times 10^5 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{2}{3}} + 3.1182 \times 10^5 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{4}{3}} + 98562. (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{5}{3}} + 27300.0} \\
 &\quad + \frac{17502.x^2e^{2(\frac{1}{3}\pi i)} + 7.1481 \times 10^5 xe^{\frac{1}{3}\pi i} + 2.363 \times 10^5 \sqrt[3]{xe^{\frac{1}{3}\pi i}} + 5.8885 \times 10^5 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{2}{3}} + 4.5228 \times 10^5 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{4}{3}} + 1.4236 \times 10^5 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{5}{3}} + 35659.}{61330.0x^2e^{2(\frac{1}{3}\pi i)} + 2.4781 \times 10^6 xe^{\frac{1}{3}\pi i} + 8.5978 \times 10^5 \sqrt[3]{xe^{\frac{1}{3}\pi i}} + 2.0787 \times 10^6 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{2}{3}} + 1.5591 \times 10^6 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{4}{3}} + 4.9281 \times 10^5 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{5}{3}} + 1.365 \times 10^5} \\
 c_{\Pi}(x) &= \frac{1689.0x^2e^{2(\frac{1}{3}\pi i)} + 62505. xe^{\frac{1}{3}\pi i} + 29901. \sqrt[3]{xe^{\frac{1}{3}\pi i}} + 62370.0 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{2}{3}} + 37170.0 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{4}{3}} + 12381. (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{5}{3}} + 5109.0}{12266.x^2e^{2(\frac{1}{3}\pi i)} + 4.9561 \times 10^5 xe^{\frac{1}{3}\pi i} + 1.7196 \times 10^5 \sqrt[3]{xe^{\frac{1}{3}\pi i}} + 4.1573 \times 10^5 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{2}{3}} + 3.1182 \times 10^5 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{4}{3}} + 98562. (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{5}{3}} + 27300.0} \\
 &\quad + \frac{17502.x^2e^{2(-\frac{1}{3}\pi i)} + 7.1481 \times 10^5 xe^{-\frac{1}{3}\pi i} + 2.363 \times 10^5 \sqrt[3]{xe^{-\frac{1}{3}\pi i}} + 5.8885 \times 10^5 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{2}{3}} + 4.5228 \times 10^5 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{4}{3}} + 1.4236 \times 10^5 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{5}{3}} + 35659.}{61330.0x^2e^{2(-\frac{1}{3}\pi i)} + 2.4781 \times 10^6 xe^{-\frac{1}{3}\pi i} + 8.5978 \times 10^5 \sqrt[3]{xe^{-\frac{1}{3}\pi i}} + 2.0787 \times 10^6 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{2}{3}} + 1.5591 \times 10^6 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{4}{3}} + 4.9281 \times 10^5 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{5}{3}} + 1.365 \times 10^5} \\
 d_{\Pi}(x) &= \frac{2713.0x^2e^{2(-\frac{1}{3}\pi i)} + 1.148 \times 10^5 xe^{-\frac{1}{3}\pi i} + 32107. \sqrt[3]{xe^{-\frac{1}{3}\pi i}} + 88080.0 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{2}{3}} + 74100.0 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{4}{3}} + 22919. (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{5}{3}} + 4411.0}{6133.0x^2e^{2(-\frac{1}{3}\pi i)} + 2.4781 \times 10^5 xe^{-\frac{1}{3}\pi i} + 85978. \sqrt[3]{xe^{-\frac{1}{3}\pi i}} + 2.0787 \times 10^5 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{2}{3}} + 1.5591 \times 10^5 (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{4}{3}} + 49281. (xe^{-\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{5}{3}} + 13650.0} \\
 &\quad + \frac{2713.0x^2e^{2(\frac{1}{3}\pi i)} + 1.148 \times 10^5 xe^{\frac{1}{3}\pi i} + 32107. \sqrt[3]{xe^{\frac{1}{3}\pi i}} + 88080.0 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{2}{3}} + 74100.0 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{4}{3}} + 22919. (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{5}{3}} + 4411.0}{6133.0x^2e^{2(\frac{1}{3}\pi i)} + 2.4781 \times 10^5 xe^{\frac{1}{3}\pi i} + 85978. \sqrt[3]{xe^{\frac{1}{3}\pi i}} + 2.0787 \times 10^5 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{2}{3}} + 1.5591 \times 10^5 (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{4}{3}} + 49281. (xe^{\frac{1}{3}\pi i})^{\frac{5}{3}} + 13650.0}
 \end{aligned}$$

3. APLICACIÓN DE LOS CRITERIOS DE PRESERVACIÓN

Ahora se representa gráficamente a los menores principales $a_{\Pi}(x)$ y $a_{\Pi}(x)d_{\Pi}(x) - b_{\Pi}(x)c_{\Pi}(x)$ de la matriz $\begin{pmatrix} a_{\Pi}(x) & b_{\Pi}(x) \\ c_{\Pi}(x) & d_{\Pi}(x) \end{pmatrix}$ y se puede observar que para $x \geq 0$ las gráficas son positivas.

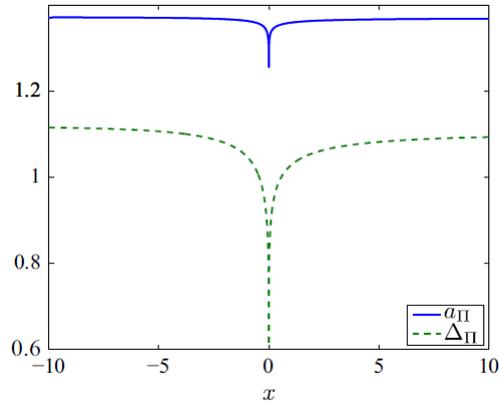


Figura 3.5: Gráfica de $a_{\Pi}(x)$ y $\Delta_{\Pi}(x)$

Y similarmente se puede verificar que las gráficas de los menores principales de la matriz $\Pi \left(\frac{s^{\frac{2}{3}} + 2s^{\frac{1}{3}} + 2}{s^{\frac{2}{3}} + 3s^{\frac{1}{3}} + 1} \right) \Big|_{s=xe^{-\frac{\pi}{3}i}}$ son positivos para $x \geq 0$, donde $\Delta_{\Pi}(x) = a_{\Pi}(x)d_{\Pi}(x) - b_{\Pi}(x)c_{\Pi}(x)$. El inciso c) se cumple puesto que la función $\frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 3s + 1}$ es una función SPR0 y $(\lambda = 3) > (n = 2)$.

Conclusiones

En este trabajo se desarrollaron criterios para la preservación de estabilidad y sincronización de sistemas autónomos de orden fraccionario conmensurable considerando además transformaciones que afectan al orden fraccionario, a la parte lineal y a la parte no lineal del campo vectorial de la ecuación diferencial fraccionaria.

Se ha dado una explicación de como utilizar los resultados para verificar si dada cierta transformación sobre un sistema autónomo de orden fraccionario conmensurable se podrá garantizar la preservación de estabilización o sincronización del mismo. Además mediante los ejemplos presentados se ha ilustrado la efectividad de los resultados.

También vale la pena mencionar que hay ciertos resultados sobre la estabilidad de sistemas autónomos fraccionarios [50, 97, 96] que pueden ser utilizados en forma similar a la Proposición 2.1 para dar las condiciones de preservación de estabilidad asintótica de las soluciones en el origen, para $0 < \alpha < 1$.

Por otra parte, se ha presentado una metodología para la estabilización y pasificación de una nueva clase de sistemas autónomos de orden fraccionario variable, basada en la preservación de funciones Hurwitz en \bar{R}_λ , la estabilidad y pasividad mediante funciones λ -HPC en el dominio de la frecuencia y el Teorema 2.3. Estos resultados extienden las técnicas clásicas para la estabilización y pasificación de sistemas LTI, a una clase de sistemas autónomos de orden fraccionario variable. También se obtuvo un resultado más general para la estabilización de una clase de sistemas autónomos de orden fraccionario variable, basado en los métodos clásicos de ubicación de polos para sistemas LTI. Los resultados presentados son un primer paso hacia la estabilización y pasificación de sistemas autónomos de orden fraccionario variable.

Por lo tanto, hay muchos problemas que aún se consideran abiertos, por ejemplo, (i) Probar un resultado análogo al Teorema 2.4 para la preservación de sistemas lineales autónomos de orden fraccionario variable; (ii) Establecer algoritmos eficientes para la estabilización y pasificación de sistemas lineales autónomos de orden fraccionario variable; (iii) Abordar los temas anteriores pero considerando sistemas no lineales.

ApéndiceA

Artículos y Congresos

Publicados:

- *Preservation of Stability and Synchronization of a Class of Fractional-Order Systems*, **Armando Fabián Lugo-Peñaloza**, José Job Flores-Godoy, Fernández-Anaya, G., *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2012, Article ID 928930, 16 pages, doi:10.1155/2012/928930
- *Stabilization and passification of distributed-order fractional linear systems using methods of preservation*, Guillermo Fernández-Anaya, José Job Flores-Godoy, **Armando Fabián Lugo-Peñaloza**, Rodrigo Muñoz-Vega., *Journal of the Franklin Institute*, 350 (2013), 2881-2900.
- *Synchornization of Complex Networks of Fractional Order Nonlinear Systems*, Rafael Martínez-Martínez, **Armando Fabian Lugo-Peñaloza**, Jorge A. León, Guillermo Fernández-Anaya, *International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE 2013)*, (2013).

Asistencia a:

- *Curso: Controlled Synchronization of Dynamical Systems*, UNAM, curso organizado por la Facultad de Ingeniería de la UNAM, el programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería de la UNAM y la Asociación de México de Control Automático (AMCA), expositores: Dr. Antonio Loría y Dra. Elena Panteley, (2011).
- *Curso Tutorial: Fundamentos de Cálculo y Control Fraccionario*, CINVESTAV, en el marco de la *International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE 2012)*, expositor: Dr. Manuel A. Duarte Mermou, (2012).

Bibliografía

- [1] Razminia A. and Baleanu D. Complete synchronization of commensurate fractional order chaotic systems using sliding mode control. *Mechatronics*, 23(7):873–879, 2013.
- [2] W. M. Ahmad and J. C. Sprott. Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 16:693–701, 2003.
- [3] M. Axtell and M. E. Bise. Fractional calculus applications in control systems. *Proc. of the IEEE Nat. Aerospace and Electronics Conference, New York*, pages 563–566, 1990.
- [4] R. L. Bagley and R. A. Calico. Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures. *AIAA Journal*, 14:304–311, 1991.
- [5] D Becker-Bessudo, G. Fernández-Anaya, and J. J. Flores Godoy. Preserving synchronization under matrix product modifications. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(26)::6631–6645, 2008.
- [6] D. S. Bernstein. *Matrix Mathematics, Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory*. Princeton University Press, 2005.
- [7] B. Brogliato, R. Lozano, B. Maschke, and O. Egeland. *Dissipative Systems Analysis and Control: Theory and Applications*. Communications and Control Engineering. Springer, 2007.
- [8] Bonnet C. and Partington J. R. Analysis of fractional delay systems of retarded and neutral type. *Automatica*, 38:1133–1138, 2002.
- [9] Li C., Su K., Tong Y., and Li H. Robust synchronization for a class of fractional-order chaotic and hyperchaotic systems. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 124(18):3242 – 3245, 2013.
- [10] M. Caputo. Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent. *Geophysics J. R. Astr. Soc.*, 13:529–539, 1967.

- [11] M. Caputo. *Elasticità e Dissipazione*. Sanichelli, Bologna, 1969.
- [12] M. Caputo. Mean fractional-order-derivatives differential equations and filters. *Annali dell' Università di Ferrara*, VII:73–84, 1995.
- [13] M. Caputo. Distributed order differential equations modelling dielectric induction and diffusion. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 4:421–442, 2001.
- [14] Abel R. Castro Figueroa. *Estabilidad*. IPN, 1998.
- [15] A. Charef, H. H. Sun, Y. Y. Tsao, and B. Onaral. Fractal system as represented by singularity function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37:1465–1470, 1992.
- [16] Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 1998.
- [17] Guanrong Chen and Tetsushi Ueta. *Chaos in circuits and systems*. World Scientific Publishing, 2002.
- [18] Shantanu Das. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Springer Berlin Heidelberg New York, 1 edition, 2008.
- [19] Weihua Deng, Changpin Li, and Jinhua Lü. Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays. *Nonlinear Dynamics*, 48:409–416, 2007.
- [20] K. Diethelm and N. J. Ford. Analysis of fractional differential equations. *Math. Anal. Appl.*, 265:229–248, 2002.
- [21] K. Diethelm and N. J. Ford. Numerical analysis for distributed-order differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 225:96–104, 2009.
- [22] K. Diethelm, N. J. Ford, A. D. Freed, and Yu Luchko. Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005.
- [23] Delgado E. and Duarte M. A. Synchronization of fractional-order systems of the lorenz type: The non adaptive case. *IEEE LATIN AMERICA TRANSACTIONS*, 12(3):410–415, 2014.
- [24] Ole Jannerup Elbert Hendricks and Paul Haase Sorensen. *Linear Systems Control; Deterministic and Stochastic Control*. Springer, 2008.
- [25] A. Eremenko and A. Gabrielov. Pole placement by static output feedback for generic linear systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 41:303–312, 2002.

-
- [26] G. Fernández. Preservation of spr functions and stabilisation by substitutions in siso plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(11):2171–2174, 1999.
- [27] G. Fernández-Anaya, J. Alvarez Ramírez, J.J. Flores Godoy, and R. Femat. Preservation of stability and synchronization in nonlinear systems. *Physics Letters A*, 371::205–212, 2007.
- [28] G. Fernández-Anaya, J. C. Martínez-García, and V. Kucera. Characterizing families of positive real matrices by matrix substitutions on scalar rational functions. *Systems and Control Letters*, 55:871–878, 2006.
- [29] G. Fernández-Anaya, J. C. Martínez-García, V. Kucera, and D. Aguilar-George. Aguilar-george, mimo systems properties preservation under spr substitutions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 51(5):222–227, 2004.
- [30] G. Fernández-Anaya, J. C. Martínez-García, V. Kucera, and D. Aguilar-George. Performance and robustness preservation in mimo systems when applying spr substitutions. *International Journal of Systems Science*, 39(12):1153–1163, 2008.
- [31] G. Fernández-Anaya, J. C. Martínez-García, V. Kucera, and José Job Flores-Godoy. in: Proceedings of the 16th world congress, the international federation of automatic control. *European Journal of Control*, pages 1–6, 2005.
- [32] G. Fernández-Anaya, J. J. Flores-Godoy, and J. Alvarez-Ramírez. *Synchronization preservation of dynamical networks*. Progress in Statistical Mechanics Research. Nova Publishers, 2008.
- [33] N. J. Ford and M. L. Morgado. Distributed order equations as boundary value problems. *Computers and Mathematics with Applications*, 2012.
- [34] A. Fradkov. Passification of non-square linear systems and feedback yakubovich-kalman-popov lemma. *European Journal of Control*, 6:573–582, 2003.
- [35] Radwan A. G., Moaddy K., Salama K. N., Momani S., and Hashim I. Control and switching synchronization of fractional order chaotic systems using active control technique. *Journal of Advanced Research*, 5:125–132, 2014.
- [36] Xin Gao and Juebang Yu. Synchronization of fractional-order chaotic systems. *Proceedings IEEE*, pages 1169–1172, 2005.
- [37] R. Gorenflo and F. Mainardi. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, chapter Fractional Calculus: Integral and differential equations of fractional order. Springer Verlag, Vienna-New York, 1997.

- [38] Ilia Grigorenko and Elena Grigorenko. Chaotic dynamics of the fractional lorenz system. *Physical Review Letters*, 91(3):034101:1–4, 2003.
- [39] C. J. Harris and J. M. E. Valencia. *The Stability of Input-Output Dynamical Systems*. Academic Press, 1983.
- [40] Tom. T. Hartley, Carl F. Lorenzo, and Helen Killory Qammer. Chaos in a fractional order chua’s system. *IEEE Transactions on circuits and systems-I: Fundamental theory and applications*, 42:485–490, 1995.
- [41] R. Hilfer. *Applications of fractional Calculus in Physics*. World Scientific, River Edge, New Jersey, 2000.
- [42] C. H. Huang, P. A. Ioannou, J. Maroulas, and M. G. Safonov. Design of strictly positive real systems using constant output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44:569–572, 1999.
- [43] Moaddy K., Radwan A. G., Salama K. N., Momani S., and Hashim I. The fractional-order modeling and synchronization of electrically coupled neuron systems. *Computers and Mathematics with Applications*, 64(10):3242–3245, 2012.
- [44] M. Karimi-Ghartemani and F. Merrikh-Bayat. Necessary and sufficient conditions for perfect command following and disturbance rejection in fractional order systems. *in: Proceedings of the 17th World Congress, The International Federation of Automatic Control*, pages 364–369, 2008.
- [45] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [46] Anatoly A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier B. V., 2006.
- [47] W. R. LePage. *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*. Communications and Control Engineering. McGraw-Hill, 1961.
- [48] C. G. Li, X. F. Liao, and J. B. Yu. The synchronization of fractional-order systems. *Physical Review Letters*, page E68, 2003.
- [49] Changpin Li and Weihua Deng. Remarks on fractional derivatives. *Applied Mathematics and Computation*, 187:777–784, 2007.
- [50] Changpin Li and Weihua Deng. Remarks on fractional derivatives. *Applied Mathematics and Computation*, 187:777–784, 2007.
- [51] Chunguang Li and Guanrong Chen. Chaos and hyperchaos in the fractional-order rössler equations. *Physica A*, 341:55–61, 2004.

-
- [52] Chunguang Li and Guanrong Chen. Chaos in the fractional order chen system and its control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 22:549–554, 2004.
- [53] Y. Li, H. Sheng, and Y. Q. Chen. On distributed order integrator/differentiator. *Signal Processing*, 91:1079–1084, 2011.
- [54] Yan Li, YangQuan Chen, and Igor Podlubny. Mittag-leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, *article in press*, 2009.
- [55] J. Lü, S. Yu, H. Leung, and G. Chen. Experimental verification of multidirectional multiscroll chaotic attractors. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 53(1):149–165, 2006.
- [56] Jinhu Lü and Guanrong Chen. A time-varying complex dynamical network model and its controlled synchronization criteria. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(6):841–846, 2005.
- [57] Jinhu Lü and Guanrong Chen. Generating multiscroll chaotic attractors: theories, methods and applications. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 16(4):775–858, 2006.
- [58] Jinhu Lü, Xinghuo Yu, Guanrong Chen, and Daizhan Cheng. Characterizing the synchronizability of small-world dynamical networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 51(4):787–796, 2004.
- [59] Jun Guo Lu. Chaotic dynamics of the fractional-order lü systems and its synchronization. *Physics Letters A*, 354:305–311, 2006.
- [60] M. Haeri M. Siami, M. S.Tavazoei. Stability preservation analysis in direct discretization of fractional order transfer functions. *Signal Processing*, 91:508–512, 2011.
- [61] F. Mainardi. The fundamental solutions of fractional diffusion-wave equation. *Applied Mathematics Letters*, 7:1461–1477, 1996.
- [62] F. Mainardi. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, chapter Fractional Calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics. Springer Verlag, Vienna-New York, 1997.
- [63] Rafael Martínez-Martínez, Hildeberto Jardón-Kojakhmetov, Jorge A. León, and G. Fernández-Anaya. Estabilización de redes complejas fraccionarias de sistemas de lorez y sistemas de chen. *AMCA*, 2009.
- [64] D. Matignon. Generalized fractional differential and difference equations: stability properties and modelling issues. *in Proc. IMACS, IEEE-SMC*, 2, 1996.

- [65] D. Matignon. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. *in Proc. IMACS, IEEE-SMC*, pages 963–968, 1996.
- [66] D. Matignon and D’Andrea-Novel. Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems. *in Proc. IMACS, IEEE-SMC*, 2:952–956, 1996.
- [67] A. E. Matouk. Stability conditions, hyperchaos and control in a novel fractional order hyperchaotic system. *Physics Letters A*, 2009.
- [68] M. M. Meerschaert, Erkan Nane, and P. Vellaisamy. Distributed-order fractional diffusions on bounded domains. *Journal of Mathematical Analysis Applications*, 379:216–228, 2011.
- [69] K. S. Miller and B. Ross. *An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley, New York, 1993.
- [70] Shaher Momani and Samir Hadid. Lyapunov stability solutions of fractional integrodifferential equations. *IJMMS*, pages 2503–2507, 2003.
- [71] Concepción A. Monje, Yang Quan Chen, and et al. *Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*. Springer, 2010.
- [72] Erick Mosekilde, Yuri Maistrenko, and Dmitry Postnov. *Chaos Synchronization: Applications to living systems*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2002.
- [73] M. Moze and J. Sabatier. Lmi tools for stability analysis of fractional systems. *Proceedings of ASME 2005 IDET/CIE conferences*, 2005.
- [74] Mathieu Moze, Jocelyn Sabatier, and Alain Oustaloup. Lmi characterization of fractional systems stability. *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, pages 419–434, 2007.
- [75] H. Saberi Najafi, A. Refahi Sheikhan, and A. Ansari. Stability analysis of distributed order fractional differential equations. *Abstract and Applied Analysis*, pages 1–12, 2011.
- [76] Zaid M. Odibat. Adaptive feedback control and synchronization of non-identical chaotic fractional order systems. *Nonlinear Dynamics*, 60:479–487, 2010.
- [77] Zaid M. Odibat, Nathalie Corson, M. A. Aziz-Alaoui, and Cirille Bertelle. Synchronization of chaotic fractional-order systems via linear control. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(1)::87–97, 2010.

-
- [78] Keith B. Oldham and Jerome Spanier. *The fractional Calculus theory and applications of Differentiation and integration to arbitrary order*. Academic Press, Inc., 1974.
- [79] Dimitri Peaucelle, Alexander Fradkov, and Boris Andrievsky. Robust passification via static output feedback - lmi results. *in: Proceedings of the 16th World Congress, The International Federation of Automatic Control*, 379:216–228, 2005.
- [80] Guojun Peng, Yaolin Jiang, and Fang Chen. Generalized projective synchronization of fractional order chaotic systems. *Physica A*, 387:3738–3746, 2009.
- [81] Ivo Petras. *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Springer, 2011.
- [82] Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum, and Jürgen Kurths. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, 2001.
- [83] Igor Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego California, 9 edition, 1999.
- [84] Igor Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 5:367–386, 2002.
- [85] Bishop R. *Mechatronics: an introduction*. Taylor and Francis Group, 2006.
- [86] Martinez-Guerra R., Perez-Pinacho C. A., and Gomez-Cortes G. C. *Synchronization of Integral and Fractional Order Chaotic Systems*. Springer, 2015.
- [87] Yu. A. Rossikhin and M. V. Shitikova. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids. *Applied Mechanics Review*, 50(1):15–67, January 1997.
- [88] Jocelyn Sabatier, Mathieu Moze, and Christophe Farges. On stability of fractional order systems. *In Plenary lecture VIII on 3rd IFAC workshop on fractional differentiation and its applications*, 2008.
- [89] Z. Santouh, A. Charef, and M. Assabba. Approximation of multiple fractional order systems. *Engineering: C.S. and In.*, 2007.
- [90] Shankar Sastry. *Nonlinear systems: analysis, stability and control*. Springer, 1999.
- [91] Jean-J. E. Slotine and Weiping Li. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [92] V. L. Syrmos, C.T. Abdallah, P. Dorato, and K. Grigoriadis. Static output feedback: A survey. *Automatica*, 33:125–137, 1997.

- [93] A. Talbot. Some theorems on positive functions. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 12:607–608, 1965.
- [94] A. Talbot. Transformation of positive functions by linear operators. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 19:460–465, 1972.
- [95] Yang Tang and Jian-An Fang. Synchronization of n-coupled fractional-order chaotic systems with ring connection. *Communications in Nonlinear Science Numerical Simulation*, 15(2):401–412, 2010.
- [96] M. S. Tavazoei and M. Haeri. A necessary condition for double scroll attractor existence in fractional-order systems. *Physics Letters A*, 367:102–113, 2007.
- [97] M. S. Tavazoei and M. Haeri. Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems. *Physica D*, 237:2628–2637, 2008.
- [98] M. S. Tavazoei, M. Haeri, S. Bolouki, and M. Siami. Stability preservation analysis for frequency-based methods in numerical simulation of fractional order systems. *SIAM Journal Numerical Analysis*, 47:321–338, 2008.
- [99] M. S. Tavazoei, M. Haeri, M. Siami, and S. Bolouki. Stability preservation problem in the methods that find rational approximation of fractional order systems. *in: Proceedings of the Sixth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference*, 2008.
- [100] Kotta Ü. Removing input derivatives in generalized state-space systems: A linear algebraic approach. *Fourth International Conference-APEIE-98*, pages 391–396, 1998.
- [101] B. M. Vinagre and C. A. Monje. Introducción al control fraccionario. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 3:5–23, 2006.
- [102] Dong-Ping Wang and Jue-Bang Yu. Chaos in the fractional order logistic delay system. *Journal of Electronic Science and Technology of China*, 6:225–229, 2008.
- [103] Xing-Yuan Wang and Jun-Mei Song. Synchronization of the fractional order hyperchaos lorenz systems with activation feedback control. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 14:3351–3357, 2009.
- [104] L. Weinberg. *Network Analysis and Synthesis*. McGraw-Hill Book Company Inc., 1962.
- [105] Chai Wah Wu. *Synchronization in Coupled Chaotic Circuits and Systems*. World Scientific Publishing, 2002.

-
- [106] Xiangjun Wu, Jie Li, and Guanrong Chen. Chaos in the fractional order unified system and its synchronization. *Journal of the Franklin Institute*, (345)::392–401, 2008.
- [107] Xiangjun Wu, Jie Li, and Guanrong Chen. Chaos in the fractional order unified system and its synchronization. *Journal of the Franklin Institute*, 345:392–401, 2008.
- [108] Xiangjun Wu and Yang Lu. Generalized projective synchronization of the fractional-order chen hyperchaotic system. *Springer Science+Media B.V.*, 2008.
- [109] Wen Xiang-Jun, Wu Zheng-Mao, and Lu Jun-Guo. Stability analysis of a class of nonlinear fractional-order systems. *IEEE Transactions on circuits and systems-II: Express briefs*, 55:1178–1182, 2008.
- [110] Xu Y. and Wang H. Synchronization of fractional-order chaotic systems with gaussian fluctuation by sliding mode control. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, 2013.
- [111] Chen Y.Q., Vinagre B.M., and Monje C.A. Une proposition pour la synthèse de correcteurs pi d ordre non entier. *Proceedings of the Action Thématique Les Systèmes à Drivées Non Entières, LAP-ENSEIRB, Bordeaux, France.,* 2003.
- [112] I. Podlubny Z. Jiao, Y. Q. Chen. Distributed-order dynamic systems: Stability, simulation, applications and perspectives. *Springer Briefs in Electrical and Computer Engineering Control*, 2012.
- [113] Fengrong Zhang and Changpin Li. Stability analysis of fractional differential systems with order lying in (1,2). *Advances in Difference Equations*, 2011.
- [114] Jin Zhou, Jun-an Lu, and Jinhua Lü. Adaptive synchronization of an uncertain complex dynamical network. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(4):652–656, 2006.